



Analyse III et IV

Prof. Tudor RATIU — Notes de Markus B. SCHENKEL

Ce document¹ comporte les notes prises par Markus B. SCHENKEL²
dans le cours *Analyse III et IV*, enseigné par Prof. Tudor RATIU
à l'EPFL en 2006 / 2007.

¹Révision 36 du 2007-06-18

²markus.schenkel@epfl.ch et <http://www.markus-schenkel.ch/analyse>

Table des matières

1	Rappel	7
1.1	Géométrie vectorielle	7
1.2	Analyse en plusieurs variables	9
1.2.1	Convérgence	9
1.2.2	Dérivées partielles	12
1.2.3	Gradient	13
1.2.4	Dérivée directionnelle	14
1.2.5	Dérivée d'ordre supérieur	15
1.2.6	Théorème de la fonction inverse	15
1.3	Les chemins et courbes	17
I	Analyse Vectorielle	19
2	Champs vectoriels	21
2.1	Introduction	21
2.1.1	Lignes de flot	22
2.2	Opérateurs	23
2.2.1	Divergence	23
2.2.2	Le rotationnel	23
2.2.3	Laplacien	25
2.3	Formules	25
3	Intégration	27
3.1	Changement des variables	27
3.2	Rappel	28
3.3	Intégrales curvilignes	29
3.3.1	Reparamétrisation	30
3.3.2	Courbes simples	32
3.4	Surfaces paramétrisées	34
3.4.1	L'aire d'une surface	36
3.4.2	Changement de paramétrisation	43
3.4.3	Digression – Interprétation physique de $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$	44

3.4.4	Théorème de GREEN	45
3.4.5	Équations de MAXWELL	52
3.4.6	Théorème de divergence de Gauss	54
3.4.7	Interprétation géométrique de la divergence	57
3.4.8	Théorème du gradient	57
3.4.9	Théorème du rotationnel	58
3.4.10	Loi de GAUSS	61
3.4.11	Formule de Green	62
3.4.12	Fonctions harmoniques	75
3.4.13	La réciproque du théorème de la moyenne	80
3.5	Coordonnées curvilignes orthogonales	84

II Analyse Complexe 91

4 Analyse complexe 93

4.1	Introduction	93
4.2	Fonctions élémentaires	97
4.2.1	Polynôme	97
4.2.2	Inversion	98
4.2.3	Homographie (transformation de MÖBIUS)	98
4.2.4	Fonction exponentielle	100
4.2.5	Fonction logarithme	101
4.2.6	Fonction puissance	104
4.2.7	Fonction racines	105
4.2.8	Fonctions hyperboliques	106
4.2.9	Interprétation géom. des applications	106
4.2.10	La sphère de RIEMANN	107
4.3	Fonctions différentiables	108
4.3.1	Applications conformes	109
4.3.2	Les équation de Cauchy-Riemann	110
4.3.3	Théorème de la fonction inverse	113
4.3.4	Dérivées des fonctions élémentaires	117
4.3.5	Intégrales curvilignes	119
4.3.6	Théorème de CAUCHY	123
4.3.7	Existence des logarithmes	126
4.3.8	Remarques importantes sur le théorème de CAUCHY	127
4.3.9	Homotopie	128
4.3.10	Formules intégrales de Cauchy	128
4.3.11	Formule de Cauchy pour les dérivées	132
4.3.12	Les inégalités de Cauchy	133
4.4	Le théorème du module maximal et fonctions harmoniques	136
4.4.1	Etude des fonction harmoniques	137

4.4.2	Le Principe du maximum - version locale	139
4.4.3	Principe du maximum - version globale	139
4.4.4	Problème de DIRICHLET	139
4.5	Fonctions analytiques	141
4.5.1	Test de WEIERSTRASS	142
4.6	Théorème de TAYLOR	150
4.6.1	Zéros des fonctions analytiques	151
4.6.2	Continuation analytique	152
4.7	Singularités	152
4.7.1	Cas spécial très important	154
4.7.2	Caractérisation de toutes les singularités	156
4.7.3	Calcul des résidus	157
4.7.4	Théorème des résidus	159
4.8	Transformée de LAPLACE	162
4.8.1	Applications	167
4.9	Séries de FOURIER	169
4.9.1	Convergence de la série	172
4.9.2	Calcul des série de FOURIER	173
4.9.3	Équation de la chaleur	174

5 work in progress

1

Rappel

Il y a trois inventions de l'humanité : le feu, la roue et l'analyse.
Prof. Tudor RATIU, Mathématicien, 2006

1.1 Géométrie vectorielle

Produit vectoriel

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$a \times b := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Propriété

$$a \times b = -b \times a$$

$$a \times a = 0$$

$$a \times (\beta b + \gamma c) = \beta a \times b + \gamma a \times c$$

Calculons le longueur $\|a \times b\|$

$$\|a \times b\|^2 = \dots = \|a\| \|b\| \sin\theta$$

Donc $\|a \times b\|$ est l'aire du parallélogramme.

Quelle direction ? Règle de la main droite !

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$$

$$(i, j, k) \cdot (i, j, k)^T = \begin{pmatrix} 0 & k & -j \\ -k & 0 & i \\ j & -i & 0 \end{pmatrix}$$

"A cross B cross C is BAC minus CAB ..."

Produit mixte

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Exemple Interprétation géométrique du déterminant.

Prenons $a = a_1i + a_2j$ et $b = b_1i + b_2j$.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$\|a \times b\| = \left\| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\| = \text{aire du parallélogramme formé par } a \text{ et } b.$$

Analogie : $\left\| \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\| = \text{Volume du parallélépipède déterminé par } a, b, c.$

(cf. Dessin p. 49)

Exemple Equation d'un plan qui passe par un point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ avec normale $n = Ai + Bj + Ck$.

Ici il manque un image

$P_0\vec{P} \perp n$ caractérise les points P dans le plan :

$$P_0\vec{P} \cdot n = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow Ai + Bj + Ck + D = 0$$

Exemple Equation du plan qui passe par $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2, P_3$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Distance d'un point à un plan Soit R un Point dans le Plan, E un Point dans l'espace, Q le Point le plus proche dans le plan. Calculer $\|Q\vec{E}\|$.

n : normale unité au plan. $v = R\vec{E}$.

$$d = v \cdot n = (RQ \cdot n + QE \cdot n = 0 + QE \cdot n \Rightarrow |v \cdot n| = \|QE\|$$

$$distance = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1.2 Analyse en plusieurs variables

1.2.1 Convergence

La suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ est de Cauchy si $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ t.q. $\|x_k - x_l\| < \epsilon, \forall l, k \geq N(\epsilon)$

Elle converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ si $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ t.q. $\|x_k - x\| < \epsilon, \forall k \geq N(\epsilon)$.

Propriété Propriété fondamentale

$\{x_k\}$ Cauchy $\Leftrightarrow \{x_k\}$ convergente. C'est équivalent à $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$.

Pourquoi ?

$$\forall i = 1, \dots, n, |a_i| \leq \|a\|_2 = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |a_i| = \|a\|_\infty$$

$$x_k \rightarrow x \Leftrightarrow x_{k_i} \rightarrow x_i, \forall i = 1, \dots, n$$

Dans \mathbb{R}^n il y a plusieurs normes $\|\cdot\|_p$.

Théorème Toutes les normes dans \mathbb{R}^n sont équivalentes. C.à.d. que si $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ deux normes arbitraires dans \mathbb{R}^n alors $\exists m, M > 0$ tels que

$$m \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M \|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Message du Théorème : On peut travailler avec la convergence des suites dans n'importe quelle norme sur \mathbb{R}^n . C'est pas juste pour dimension infini.

Démonstration Soit $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ la norme euclidienne et $\|x\|_1$ arbitraire. On a

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow \|x\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_1 \leq \\ & \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_1 \leq \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_1 \right)}_{=M>0} = M \|x\|_2 \end{aligned}$$

Pour démontrer l'autre inégalité $\|x\|_1 \leq M \|x\|_2$ on utilise le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS (Toute fonction continue sur un intervalle compact¹ atteint son min et son max).

$$f : S^{n-1} \rightarrow [0, \infty]$$

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots} \right\}$$

S^{n-1} est un compact (une sphère).

$$f(x) := \|x\|_1$$

¹compact := fermé et borné

f est continue :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \|x\|_1 - \|y\|_1 \right| \leq \|x - y\|_1$$

f est uniformément continue \Rightarrow continue. On peut appliquer BOLZANO-WEIERSTRASS à f sur S^{n-1} . Donc $\exists m > 0$ le min de f sur S^{n-1} qui est atteint : $m = \min_{x \in S^{n-1}} f(x) = f_{x \in S^{n-1}}(x_0) = \|x_0\|_1 > 0$ car $x_0 \neq 0$.

$$0 < m = \min_{x \in S^{n-1}} f(x) \Rightarrow 0 < m \leq \|x\|_1 \quad \forall x \in S^{n-1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1}$

$$\Rightarrow 0 < m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_1 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \Rightarrow m \|x\|_2 \leq \|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Donc on a démontré le théorème si $\|x\|_2$ est la norme euclidienne. ■

Remarque

$$m \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M \|x\|_2$$

équivalent

$$\frac{1}{M} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{m} \|x\|_1 \quad .$$

On va démontrer le théorème en général. Soit $\|x\|'$ une autre norme. donc on a :

$$m' \|x\|' \leq \|x\|_2 \leq M' \|x\|'$$

$$m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1$$

Ici $\|x\|_2$ est toujours la norme euclidienne.

$$\Rightarrow m' \|x\|' \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1 \Rightarrow \|x\|' \leq \frac{M}{m'} \|x\|_1$$

et

$$M' \|x\|' \geq \|x\|_2 \geq m \|x\|_1 \Rightarrow \|x\|' \geq \frac{m}{M'} \|x\|_1$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m'} \|x\|_1 \leq \|x\|' \leq \frac{m}{M'} \|x\|_1$$

■

Autres choses à savoir

- Limites des fonctions
- Continuité
- Continuité uniforme
- Graphiques des fonction

1.2.2 Dérivées partielles

Définition $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que f est **dérivable** par rapport à x_i au point $P(x_1, \dots, x_n)$ si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\epsilon}$$

existe. Si oui, on note $\frac{\partial f}{\partial x_i} P$ cette valeur : c'est la dérivée partielle de f au point P par rapport à x_i .

Il y a des fonction discontinue dont toutes les dérivées partielles existent.

Exemple

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Définition On dit que f est **différentiable** en x_0 si $\exists T \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} [f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)] = 0 \quad .$$

Si un tel T existe il est unique et on écrit $T = Df(x_0)$.

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & 1/n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m/1 & \dots & m/n \end{pmatrix}$$

Dans les bases canonique. Toute fonction diff. est continue.

Propriété fondamentale

f est de classe $C^1 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont continue $\forall i = 1, \dots, n$.

Règle de calcul

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) \circ Dg(x_0)$$

1.2.3 Gradient

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f = \text{grad}f := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)$$

Théorème Le gradient est \perp à la surface de niveau de f

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = h = \text{const.}\}$$

$c :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow S$ courbe diff.

Ici il manque un image

Démonstration On dérive $f(c(t)) = k$:

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(c(t)) = \nabla f(c(0))c'(0) \Leftrightarrow \nabla f(c(0)) \perp c'(0)$$

$c'(0)$ est arbitraire $\Rightarrow \nabla f(c(0)) \perp$ surface

■

Exemple Équation du plan tangent à la surface de niveau de f :

$$\nabla f(x_0)(x - x_0) = 0$$

1.2.4 Dérivée directionnelle

f fonction donnée.

v vecteur.

Dérivée directionnelle de f en direction v :

$$\left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0}$$

Si f est différentiable \Rightarrow la dérivée directionnelle est $\nabla f(x) \cdot v$.

Propriété Si $\nabla f(x) \neq 0$ alors $\nabla f(x)$ est la direction de croissance maximale de f .

Démonstration Dérivée directionnelle en direction du vecteur unité u .

$$\nabla f(x) \cdot u = \|\nabla f(x)\| \underbrace{\|u\|}_{=1} \cos \theta, \theta = \angle(\nabla f(x), u)$$

C'est maximale si $\cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$. Donc $u \parallel \nabla f(x)$.

■

Exemple Loi de gravitation :

$$\vec{F} = m\vec{a} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{n}$$

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = -\nabla V$$

où $V = -G \frac{mM}{r}$

$$\nabla \frac{1}{r} = \nabla (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -1/2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x = -\frac{x}{r^3}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow -\nabla V = GmM\nabla 1/r = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{n}$$

1.2.5 Dérivée d'ordre supérieur

Si f est de classe C^2 alors $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$Df(x) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$$

$$Df : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$$

$$D^2 f(x) = D(Df)(x) \in L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)) \cong L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$$

Le théorème de Schwarz affirme que si f est de classe C^k alors $D^k f(x) \in L_{sym}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ est symétrique.

Théorème de Taylor

cf. livre (p. 143, paragraph 3.2)

Maxima et minima

cf. livre (p. 203, paragraph 3.3)

Multiplicateurs de Lagrange

cf. livre (p. 225, paragraph 3.4)

1.2.6 Théorème de la fonction inverse

Théorème $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^k, k \geq 1$

Si $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.

alors f est un C^k -**difféomorphisme** local. C.à.d. $\exists V \subset U$ ouvert, $x \in$

$V, \exists W \subset \mathbb{R}^n$, ouvert

$f(x_0) \in W$ tels que $f|_V : V \rightarrow W$ est inversible et de plus $(f|_V)^{-1} : W \rightarrow V$ est aussi de classe C^k .

$$Df(x_0) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0)$$

$$\det Df(x_0) = \det \text{ Jacobien} \neq 0$$

Corollaire - Théorème de la fonction implicite $E_1 = \mathbb{R}^n, E_2 = \mathbb{R}^m, F = \mathbb{R}^m$

$W \subset E_1 \times E_2$

$f \in C^k(W; F), k \geq 1$

Soit $(x_0, y_0) \in W, x_0 \in E_1, y_0 \in E_2$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $Df(x_0, y_0) : E_2 \rightarrow F$ isomorphisme.

Alors il existent des voisinages ouvertes $U \subset E_1 \times E_2, U \subset W, (x_0, y_0) \in U$ et $V \subset E_1, x_0 \in V$ et une fonction unique $g \in C^k(V; E_2)$ satisfaisant :

$$((x, y) \in U \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = g(x))$$

De plus :

$$Dg(x) = -[D_2f(x, g(x))]^{-1} \circ D_1f(x, g(x)), \forall x \in V$$

Exemple Étude des surfaces : $g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in U, g$ de classe $C^k, k \geq 1$

Surfaces de niveau :

$$s = \{\tilde{x} \in U | g(\tilde{x}) = c_0\}, c_0 = \text{const.}, \tilde{x} = (x, y, z) \in U$$

Hypothèse : $\frac{\partial y}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Th. d. f. implicite}} \exists \text{ fonction } z = k(x, y)$$

telle que autour de (x_0, y_0, z_0) on a $g(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = k(x, y)$.

1.3 Les chemins et courbes

$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diff.

$r(t) = \frac{dc}{dt} = \dot{c}(t)$ vecteur vitesse instantanée.

Règles de calcul ($\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{R}$) :

$$\frac{d}{dt} [\alpha(t)b(t) + \beta(t)c(t)] = \dot{\alpha}(t)b(t) + \alpha(t)\dot{b}(t) + \dot{\beta}(t)c(t) + \beta(t)\dot{c}(t)$$

$$\frac{d}{dt} [a(t) \cdot b(t)] = \dot{a}(t) \cdot b(t) + a(t) \cdot \dot{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt} [a(t) \times b(t)] = \dot{a}(t) \times b(t) + a(t) \times \dot{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt} [c(q(t))] = c'(q(t))\dot{q}(t)$$

Deuxième loi de Newton :

$$\vec{F}(c(t)) = m\vec{a}(t) = m\ddot{c}(t)$$

Loi gravitationnelle de Newton :

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r}$$

Loi du mouvement

$$\dots \Rightarrow \ddot{c}(t) = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

$$r = \|\vec{r}\|.$$

Dérivation de la loi de Kepler pour les orbites circulaires.

Exemple C'était physique pas math, donc je ne le note pas ici.

Première partie
Analyse Vectorielle

2

Champs vectoriels

Bill gates c'est rien!

Prof. Tudor RATIU, Mathématicien, 2006

2.1 Introduction

Champ scalaire : $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Champ vectoriel : $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

U ouvert dans \mathbb{R}^n .

Exemple

1. $V(x, y) = -yi + xj$
2. $V(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}i - \frac{x}{x^2+y^2}j$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ Approximation d'un fluid tournant
3. $T(x, y, z)$ Température. L'énergie calorique est $J = -k\nabla T, k > 0$
4. $F = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}, F = -\nabla V, V = -GmM\frac{1}{r}$
5. Loi de Coulomb

Y a-t-il des champs qui ne sont pas gradients ? Oui !

6. $V(x, y) = yi - xj$ Si $V = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j \Leftrightarrow y = \frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = -x$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$

7. Si $F = -\nabla V$ on a : $m\ddot{\vec{r}} = -\nabla V(\vec{r})$ Soit $E = \frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}\|^2 + V(\vec{r})$ énergie.

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \nabla V(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \underbrace{(m\ddot{\vec{r}} + \nabla V(\vec{r}))}_{=0 \text{ Loi de Newton}} = 0$$

8. Vitesse d'échappement d'une raquette. Avec masse m , distance R_0 du centre de la terre, v_l vitesse d'échappement. La vitesse telle que si $R \rightarrow \infty$, alors $v \rightarrow 0$

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{GmM}{R_0}$$

après

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R}$$

Mais l'énergie est conservée :

$$E_0 = E \xrightarrow[\substack{R \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 0}]{0} 0 \Rightarrow E \equiv 0.$$

$$\Rightarrow E_0 = 0 = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{GmM}{R_0}$$

$$v_l = \sqrt{\frac{2MG}{R_0}}$$

Mais

$$g = \frac{GM}{R_0^2} \text{ (car } mg = \frac{mMG}{R_0^2} \text{)}$$

$$\Rightarrow v_l = \sqrt{2gR_0}$$

Pour la terre : $v_l = 11.127 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2.1.1 Lignes de flot

Définition Si F est un champ vectoriel. Une **ligne de flot** est un chemin $c(t)$ tel que

$$\frac{dc(t)}{dt} = F(c(t))$$

c.à.d. F est la vitesse de la particule sur le chemin.

2.2 Opérateurs

2.2.1 Divergence

$$F = F_1i + F_2j + F_3k$$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

Interprétation physique. F est la vitesse d'un fluide (vu ges ???) Alors $\operatorname{div} F$ est le changement d'un volume unité sous le flot.

Si $\operatorname{div} F < 0$, le fluide est en compression.

Si $\operatorname{div} F > 0$, le fluide est en expansion.

Si $\operatorname{div} F = 0$, le fluide est incompressible.

$$\frac{1}{v(t)} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} v(t) \approx \operatorname{div} F(x_0)$$

(On va démontrer cette relation plus tard comme corollaire du Théorème de Gauss (cf))

2.2.2 Le rotationnel

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F = \nabla \times F &:= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &:= (\partial_y F_3 - \partial_z F_2)i - (\partial_x F_3 - \partial_z F_1)j + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)k. \end{aligned}$$

Rotationnel et rotation Corps rigide qui tourne autour L avec une vitesse angulaire ω qui est constante.

On Point à la distance \vec{r} d'une axe qui tourne avec $\vec{\omega}$. $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega y i + \omega x j$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega k = 2\vec{\omega}$$

le rotationnel est deux fois la vitesse angulaire

Le rotationnel est deux fois la vitesse angulaire Soit F la vitesse d'un fluide. $\nabla \times F$ est égal au double de la vitesse angulaire d'un corps rigide qui tourne avec le fluide (autour d'un point). Don $(\nabla \times F)(R) = 0$ et il n'y a pas de rotation, donc pas des tourbillons.

La palette tourne avec le fluide, mais la palette ne tourne pas autour de son axe. Si $\text{rot } v = 0$, le fluide s'appelle **irrotationnel**.

Exemple $v(x, y, z) = \frac{yi-xj}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$

Fluide qui s'écoule au centre. Le fluide tourne mais il est irrotationnel.

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

Remarque : On utilise ici ∂_x à la place de $\frac{\partial}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} \nabla &= \partial_x i + \partial_y j + \partial_z k \\ \nabla f &= (\partial_x f)i + (\partial_y f)j + (\partial_z f)k \\ \nabla \cdot F &= \partial_x F_1 + \dots + \partial_z F_3 \\ \nabla \times F &= \dots \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla \times (\nabla f) = 0} \quad (2.1)$$

oben
Démonstration
voir ...

Rotationnel scalaire

$$\begin{aligned} F_{(x,y)} &= P_{(x,y)}i + Q_{(x,y)}j + 0k \\ \nabla \times F &= \dots = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{div}(\text{rot } F) = 0} \quad (2.2)$$

Vérification directe.

Exemple

$$V(x, y, z) = xi + yj + zk$$

est il le rot d'un autre champ vectoriel ?

Solution Si oui, alors $\nabla \cdot \nabla = 0$ mais $\nabla \cdot \nabla = 3 \neq 0 \Rightarrow$ **Non.**

2.2.3 Laplacien

$$\Delta f = \nabla^2 f := \nabla \cdot (\nabla f) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2.3 Formules

f, g : scalaire, F, G champs vect., c const

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla \frac{f}{g} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}, g \neq 0$
5. $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$
6. $\operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div} F + F \cdot \nabla f$
7. $\operatorname{rot}(F + G) = \operatorname{rot} F + \operatorname{rot} G$
8. $\operatorname{div}(F \times G) = G \operatorname{rot} F - F \operatorname{rot} G$
9. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$
10. $\operatorname{rot}(fF) = F \operatorname{rot} f + \nabla f \times F$
11. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$
12. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \nabla g$
13. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
14. $\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$
15. $\operatorname{rot}(F \times G) = F \operatorname{div} G - G \operatorname{div} F + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G$
16. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F$

cf. $(fg)'$

Note : $\Delta F := (\Delta F_1)i + \dots + (\Delta F_3)k$

$$(G \cdot \nabla)F = (G_1 \partial_x + G_2 \partial_y + G_3 \partial_z)F = \begin{pmatrix} G_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + G_2 \frac{\partial F_1}{\partial y} + G_3 \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ G_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} + G_2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + G_3 \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ G_1 \frac{\partial F_3}{\partial x} + G_2 \frac{\partial F_3}{\partial y} + G_3 \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3

Intégration

Qu'est-ce que on fait si on est perdue ? On prend la dérivé !
Prof. Tudor RATIU, Mathématicien, 2006

- Regarder le mat d'analyse II.
- Intégrales doubles et triples
 - Intégrales itérés
 - Théorème de Fubini :

$$\int_J F(t) dt = \int_J \int_I f(x, y) dx dy = \int_I \int_J f(x, y) dy dx = \int_{I \times J} f(x, y) d(x, y)$$

- etc.

3.1 Changement des variables

$T : W' \rightarrow W_1 \in C^1$ sauf sur une union fini des graphes.

$$\begin{aligned} \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \\ = \iiint_{W'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \end{aligned}$$

Coordonnées polaires $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

3.2 Rappel

Voir Chap. 5 et 6 du livre.

Coordonnées polaires \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= r \\ \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_{D'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \\ z &= z \\ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} &= r \\ \iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{W'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r \, dr \, d\theta \, dz \end{aligned}$$

Coordonnées sphériques \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \varphi \\ \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} &= -\rho^2 \sin \varphi \\ \iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{W'} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \end{aligned}$$

3.3 Intégrales curvilignes

$c[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 : $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ est continue sur $[a, b]$

$$\int_C f \, ds := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Formellement : $ds = \|\dot{c}(t)\| \, dt$.

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $t \mapsto \vec{F}(c(t))$ est continue.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{F}(c(t)) \cdot \dot{c}(t) \, dt \in \mathbb{R}$$

$$\int_C \vec{F} \, ds := \left(\int_C F_1 \, ds \right) i + \left(\int_C F_2 \, ds \right) j + \left(\int_C F_3 \, ds \right) k \in \mathbb{R}^3$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{s} := \int_C \left(\vec{F} \times \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \, ds \right) = \int_C \left(\vec{F}(c(t)) \times \dot{c}(t) \right) \, dt \in \mathbb{R}^3$$

Exemple Nr. 1

$c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helice.

$$\dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$\int_C f \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \, dt = \frac{2}{3} \sqrt{2} \pi (3 + 4\pi^2)$$

$$\vec{F} = xi + yj + zk$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (\cos t i + \sin t j + t k) \cdot (-\sin t i + \cos t j + k) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + \sin t \cos t + t) \, dt = \int_0^{2\pi} t \, dt = 2\pi^2$$

Remarque : On écrit souvent $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$

Exemple Nr. 2
skipped

3.3.1 Reparamétrisation

$h : I \rightarrow I_1$, C^1 , bijective

$c : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$p := c \circ h : I \rightarrow \mathbb{R}^3$

est une **reparamétrisation** de c .

La définition implique que les extrémités de I sont envoyés vers h sur les extrémités de I_1 .

Il y a deux possibilités :

$$(c \circ h)(a) = c(a_1) \text{ et } (c \circ h)(b) = c(b_1) \leftarrow \text{ conserve l'orientation}$$

$$(c \circ h)(a) = c(b_1) \text{ et } (c \circ h)(b) = c(a_1) \leftarrow \text{ inverse l'orientation}$$

Théorème Soit p une reparamétrisation de c

$c : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

1. Alors $\int_C f ds = \int_p f ds$

2. Si p conserve l'orientation, alors $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_p \vec{F} \cdot d\vec{s}$

3. Si p inverse l'orientation, alors $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_p \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Démonstration Par hypothèse $\exists h : [a, b] \rightarrow [a_1, b_1]$, C^1 , bijective telle que $p = c \circ h$.

Donc $p'(t) = c'(h(t))h'(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_p f \, ds &= \int_a^b f(p(t)) \|p'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b f(p(t)) \|c'(h(t))h'(t)\| \, dt \\ &\stackrel{\tau=h(t) \Rightarrow d\tau=h'(t) \, dt}{=} \int_a^b f(c(h(t))) \|c'(h(t))\| |h'(t)| \, dt \end{aligned}$$

- Si h conserve l'orientation, alors $h'(T) > 0$
- Si h inverse l'orientation, alors $h'(T) < 0$

$$\int_P \vec{F} \, d\vec{s} = \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1} \vec{F}(c(\tau)) \cdot \vec{c}'(\tau) \, d\tau & \text{Si } p \text{ conserve l'orientation} \\ - \int_{a_1}^{b_1} \vec{F}(c(\tau)) \cdot \vec{c}'(\tau) \, d\tau & \text{Sinon} \end{cases}$$

Théorème $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. C' par morceaux.
Alors

$$\int_c \nabla f \cdot d\vec{s} = f(c(b)) - f(c(a))$$

Démonstration Soit $\varphi(t) = f(c(t))$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 par morceaux

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) = \nabla f(c(t)) \cdot \dot{c}(t) &\Rightarrow \int_a^b \dot{\varphi}(t) \, dt = \int_a^b \nabla f(c(t)) \cdot \dot{c}(t) \, dt \\ &\Rightarrow \underbrace{\varphi(b) - \varphi(a)}_{f(c(b)) - f(c(a))} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

■

3.3.2 Courbes simples

Définition $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ arcs lisses (courbes c_1, \dots, c_n)

P_0, P_1, \dots, P_n sont $n+1$ points tels que P_{j-1} et P_j soient respectivement l'extrémité et l'origine de Γ_j .

L'union des Γ_j , $1 \leq j \leq n$, est un **arc** Γ . L'orientation de Γ est donnée par les orientations des Γ_j . Si $P_0 = P_n$, l'arc est **fermé**. L'arc (ou la **courbe**) est **simple** si la relation $P \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$, $i \neq j$ entraîne $j = i+1$ ou bien $i = 1, j = n$ et $P_0 = P_n$.

On définit

$$\int_{\Gamma} \dots := \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \dots$$

Tout ce qu'en a fait jusqu'ici reste valable pour les arcs simples.

Exemple Loi d'Ampère

Soit \vec{H} un champ magnétique dans \mathbb{R}^3 . Soit c une courbe fermée orientée dans \mathbb{R}^3 .

Dans des unités physiques convenables, la loi d'Ampère dit que

$$I = \int_C \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

où I est le courant qui traverse toute la surface dont le bord est C .

Remarque On néglige les corps similaires aux ... de MÖBIUS.

Exemple $\vec{c}(t)$ courbe, $\vec{T}(t)$ vecteur tangent unité.

Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_C \vec{T} \cdot d\vec{s}$?

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{\dot{\vec{c}}(t)}{\|\dot{\vec{c}}(t)\|} \\ \int_C \vec{T} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \vec{T}(\vec{c}(t)) \cdot \dot{\vec{c}}(t) dt = \int_C \frac{\dot{\vec{c}}(t)}{\|\dot{\vec{c}}(t)\|} \cdot \dot{\vec{c}}(t) dt \\ &= \int_a^b \|\dot{\vec{c}}(t)\| dt = L(C) \text{ Longueur de } C \end{aligned}$$

Exemple Hypocycloïde

$$c(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

a) L'image de c .b) Soit $\vec{F}(x, y) = xi + yj$. Calculer $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{3 \cos^2 t (-\sin t)} = -\tan t$$

Si $t \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow -\tan t < 0$.Si $t = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$ Si $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\infty$ Si $t = \pi \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$ Si $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \pm\infty$

b)

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^\pi (\cos^3 t i + \sin^3 t j) \cdot (-3 \cos^2 t \sin t i + 3 \sin^2 t \cos t j) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-3 \cos^5 t \sin t + 3 \sin^5 t \cos t) dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \cos^5 t d(\cos t) + 3 \int_0^{2\pi} \sin^5 t d(\sin t) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} (\cos^6 t + \sin^6 t) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Autre façon :

$$\vec{F} = xi + yj = \nabla \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{s} = 0$$

puisque c 'est fermée.**Exemple** Champ gravitationnel.

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

Démontrer que le travail fait par le champ pour bouger un corps de (x_1, y_1, z_1) à (x_2, y_2, z_2) dépend seulement de R_1 et R_2 où $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Nous savons que $\vec{F} = -\nabla V$ où $V = -G \frac{Mm}{\|\vec{r}\|}$.

Donc le travail le long d'une courbe $c(T)$.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int \nabla V \cdot d\vec{s} = -V(c(b)) + V(c(a)) = -GMm \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

Exemple En général si $\vec{F} = \nabla\Phi$ alors le travail le long d'une courbe qui commence à A et finit à B est égal à

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \nabla\Phi \cdot d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A) \quad .$$

Exemple Calculer le centre de masse d'un fil de densité ρ :

Le centre est donnée par la condition que la somme de tous les moments est zéro.

$$M = \int_C \rho \, ds = \text{masse.}$$

$$\int_C \rho \vec{\omega} \, ds = 0 \text{ où } \vec{\omega} = \vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_C \rho(\vec{OP} - \vec{OC}) \, ds = \int_C \rho \vec{OP} \, ds - \int_C \rho \vec{OC} \, ds = \int_C \rho \vec{r} \, ds - \underbrace{\vec{OC} \int_C \rho \, ds}_M$$

$$\vec{OC} = \frac{\int_C \rho \vec{r} \, ds}{M} \quad .$$

3.4 Surfaces paramétrisées

[dessin plan qui n'est pas un graphe] Les graphes ne suffisaient pas pour décrire les surfaces.

Définition $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^3$ est un **morceaux de surface lisse** si Σ_i est l'image d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ du plan $0uv$ qui vérifie :

- (i) $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ est bijective ; $\Phi : D \rightarrow \Sigma$
- (ii) Φ est de classe $C^1 \Leftrightarrow x, y, z$ sont de classe C^1 et $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq 0$
- (iii) Σ a une orientation qui est choisie par le normale $T_u \times T_v$ où $T_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$.
Avec $n := \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$ normale unité extérieure.

Remarque Puisque $t_u \times T_v \neq 0 \Rightarrow \exists$ plan tangent à la surface Σ_n .

Exemple Cône

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, u \geq 0$$

Régulière ? $x^2 + y^2 = u^2 = z^2, u \geq 0 \Rightarrow z \geq 0 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$T_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \cos v i + \sin v j + k$$

$$T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = -u \sin v i + u \cos v j \quad T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -u \cos v i -$$

$$u \sin v j + uk$$

On cherche les points où $t_u \times t_v \neq 0$.

$$u \sin v = 0$$

$$u \cos v = 0$$

$$u = 0$$

si $u = 0$ on trouve $(0, 0, 0)$ le sommet du cône.

Exemple Plan tangent dans un point régulier.

Σ_i donnée par $z = g(x, y)$.

Solution $x = u, y = v, z = g(u, v)$

$$T_u = i + \frac{\partial g}{\partial u} k$$

$$T_v = j + \frac{\partial g}{\partial v} k$$

$$T_u \times T_v = \dots = -g_u i - g_v j + k \neq 0 \quad \forall (u, v)$$

Donc la surface est régulière.

$$(-g_u, -g_v, 1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \text{ où } (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$$

$$z - z_0 = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Exemple Trouver une paramétrisation de l'hyperboloïde avec une nappe $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Solution $x^2 + y^2 = \text{const}$ si $z = z_0 = \text{const}$.

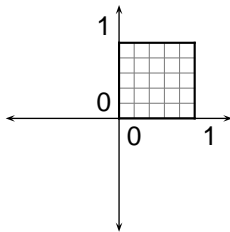
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - z^2 = r^2 - z^2 = 1$$

$$\Rightarrow r = \cosh u, \quad z = \sinh u$$

$$x = (\cosh u)(\cos \theta), \quad y = (\cosh u)(\sin \theta), \quad z = \sinh u$$

3.4.1 L'aire d'une surface



Aire du parallélogramme :

$$A = \|\Delta u T_u \times \Delta v T_v\| = \Delta u \Delta v \|T_u \times T_v\|$$

On fait la somme et on laisse $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$.

$$A(\Sigma_i) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv$$

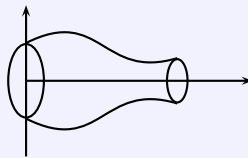
$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}$$

Exemple Aire d'un graphe

Solution

$$\begin{aligned}
 x &= u, y = v, z = g(u, v) \\
 T_u &= i + g_u k \\
 T_v &= j + g_v k \\
 T_u \times T_v &= -g_u i - g_v j + k \neq 0 \\
 A(\Sigma) &= \iint_D \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

Exemple Surfaces de revolution



$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Dériver ces formules.

Première : $x = u, y = v, z = g(u, v), D = \{(u, v) | u \in [a, b], v \in [0, 2\pi]\}$
 $x = u, y = f(u) \cos v, z = f(u) \sin v$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f'(u) \cos v & -f(u) \sin v \end{vmatrix} = -f(u) \sin v \\
\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} f'(u) \cos v & -f(u) \sin v \\ f'(u) \sin v & -f(u) \cos v \end{vmatrix} = -f'(u)f(u) \\
\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f'(u) \sin v & f(u) \cos v \end{vmatrix} = f(u) \cos v \\
[\dots]^2 + [\dots]^2 + [\dots]^2 &= f(u)^2(1 + f'(u)^2) \\
\text{Aire} &= \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv = \iint_D |f(u)| \sqrt{1 + f'(u)^2} \, du \, dv \\
&= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} \, d\theta \right) dx \\
&= 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx
\end{aligned}$$

Il y a une infinité des paramétrisations.

Théorème Soit Σ_i un morceau de surface lisse admettant deux paramétrisations lisses suivantes :

$$\begin{aligned}
(u, v) \in D &\xrightarrow{r} r(u, v) \in \Sigma_i \\
(\mu, \nu) \in D &\xrightarrow{\rho} \rho(\mu, \nu) \in \Sigma_i
\end{aligned}$$

D, Δ deux domaines dans les plans ouv et $o\mu\nu$.

Alors il existe une application

$$\varphi : (u, v) \in D \mapsto \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) = (\mu, \nu) \in \Delta$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\nu(u, v) = \rho(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)), \forall (u, v) \in D \Leftrightarrow \nu = \rho \circ \varphi$

1. $\varphi : D \rightarrow \Delta$ est bijective et l'image de la frontière de D est la frontière de Δ

Ici il manque un image

$$2. \varphi \in C^1(D) \text{ et } \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{array} \right| \neq 0, \forall (u, v) \in D$$

Conclusions

1. $\exists \varphi^{-1} : \Delta \rightarrow D$ est de classe C^1 par le théorème de la fonction inverse.
 φ^{-1} satisfait aussi (i), (ii), (iii)
2. Calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial u} \\ \frac{\partial r}{\partial v} &= \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial v} \\ \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial u} \times \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \frac{\partial \nu}{\partial v} \\ &= 0 + \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial \nu}{\partial v} \times \frac{\partial \rho}{\partial \nu} + \frac{\partial \nu}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} \times \frac{\partial \rho}{\partial \mu} + 0 \\ &= \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial \nu}{\partial v} - \frac{\partial \nu}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \times \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \\ &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \mu}{\partial u} & \frac{\partial \mu}{\partial v} \\ \frac{\partial \nu}{\partial u} & \frac{\partial \nu}{\partial v} \end{array} \right| \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \times \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \\ &= \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(u, v)} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \times \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} &= \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(u, v)} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \times \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \\ \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} du dv &= \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(u, v)} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \times \frac{\partial \rho}{\partial \nu} du dv \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \times \frac{\partial \rho}{\partial \nu} d\mu d\nu \\ \Rightarrow \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv &= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \times \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right\| d\mu d\nu \end{aligned}$$

Donc la définition suivante a du sens :

Définition $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue
 $\Sigma_i \subset U \subset \mathbb{R}^3$ morceau de surface lisse, paramétrisé par $r(u, v)$.

L'intégral de f sur Σ_i est :

$$\iint_{\Sigma_i} f \, d\sigma := \iint_D f(r(u, v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

La définition ne dépend pas de la paramétrisation. En particulier, si $f \equiv 1 \Rightarrow A(\Sigma) = \iint_D \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \, du \, dv$

Méthode de calcul

- 1) On paramétrise Σ_i d'une façon lisse. $\nu(u, v)$, $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0$
 – On exprime l'intégrand en fonction de (u, v) :

$$g(u, v) := f(r(u, v))$$

- On pose $d\sigma = \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \, du \, dv$ et on calcule

$$\iint_{\Sigma_i} f \, d\sigma = \iint_D g(u, v) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

Exemple Intégrales sur les graphes.

$Z = g(x, y)$ surface.

$x = u, y = v, z = g(u, v)$

$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2}$

Donc

$$\iint_{\Sigma_i} f \, d\sigma = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} \, dx \, dy$$

Interprétation géométrique

Ici il manque un image

n vecteur unité à la surface $z = g(x, y)$

Surface : $z - g(x, y) = 0$

Gradient \perp surface de niveau de la fonction $z - g(x, y)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)}_{:=N} \perp \text{surface}$$

$$n = \frac{N}{\|N\|} \Rightarrow N \cdot k = \|N\| \underbrace{\|k\|}_{1} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{N \cdot k}{\|N\|} = n \cdot k \Rightarrow \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \frac{1}{\cos \theta}$$

Donc

$$\iint_{\Sigma_i} f \, d\sigma = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \frac{1}{\cos \theta} \, dx \, dy$$

Formellement :

$$d\sigma = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} \, dx \, dy = \frac{dx \, dy}{n \cdot k}$$

Exemple Calculer $\iint_{\Sigma_i} x \, d\sigma$ sur Σ_i est le triangle des sommets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$

Solution

Ici il manque un image

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + y + z + 1 = 0 \Rightarrow z = -x - y + 1$$

Ici il manque un image

Normale au plan : $N = (1, 1, 1)$, $n = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $n \cdot k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x \, d\sigma &= \iint_D x \sqrt{3} \, dx \, dy = \sqrt{3} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x \, dy \right) dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left(y \Big|_0^{1-x} \right) dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x(1-x) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Définition $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continue
 Σ_i morceau de surface lisse, Φ paramétrisation

$$n = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}, \quad T_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

1. $\iint_{\Sigma_i} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} := \iint_{\Sigma_i} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma \in \mathbb{R}$
2. $\iint_{\Sigma_i} \vec{F} d\sigma := \left(\iint_{\Sigma_i} F_1 d\sigma \right) + \left(\iint_{\Sigma_i} F_2 d\sigma \right) + \left(\iint_{\Sigma_i} F_3 d\sigma \right) \in \mathbb{R}^3$
3. $\iint_{\Sigma_i} \vec{F} \times d\vec{\sigma} := \iint_{\Sigma_i} (\vec{F} \times \vec{n}) d\sigma \in \mathbb{R}^3$
4. $\iint_{\Sigma_i} f d\vec{\sigma} := \iint_{\Sigma_i} (f\vec{n}) d\sigma \in \mathbb{R}^3$

Règles

1. $d\sigma = \|T_u \times T_v\| du dv$
2. $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma = T_u \times T_v du dv$
3. $\iint_{\Sigma_i} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} := \iint_D \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot (T_u \times T_v) du dv$
4. $\iint_{\Sigma_i} \vec{F} \times d\vec{\sigma} := \iint_D \vec{F}(\Phi(u, v)) \times (T_u \times T_v) du dv$
5. $\iint_{\Sigma_i} f d\vec{\sigma} := \iint_D f(\Phi(u, v))(T_u \times T_v) du dv$

Orientation Choix d'un vecteur normal à la surface. Ce choix est toujours possible localement. Mais c'est pas toujours possible globalement. *Attention!*. Rouban de MÖBIUS : pas vrai 1858.

Soit \vec{n} une orientation. Soit $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation.

$$\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = \pm n(u, v)$$

Si $+$ la paramétrisation **conserve** l'orientation.

Si $-$ la paramétrisation **inverse** l'orientation.

NB : n n'est jamais 0 parce que c'est une surface lisse est continue.

convention

Par *convention*, pour un graphe $z = g(x, y)$ l'orientation est choisie telle que $n, k > 0$.

Si on prends la paramétrisation $(u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$ alors elle conserve l'orientation :

$$\vec{n} = \frac{-g_x \vec{i} - g_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} \Rightarrow \vec{h} \cdot \vec{k} > 0$$

3.4.2 Changement de paramétrisation

$\Phi_1, < \Phi_2$ deux paramétrisations lisses pour Σ_i

- Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue (nous l'avons démontré)

$$\iint_{\Phi_1} f \, d\sigma = \iint_{\Phi_2} f \, d\sigma$$

- Si Φ_1 et Φ_2 conservent l'orientation, on

$$\iint_{\Phi_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Phi_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

- Si Φ_1 préserve l'orientation mais Φ_2 inverse l'orientation on a

$$\iint_{\Phi_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = - \iint_{\Phi_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

Interprétation physique

Ici il manque un image

On forme le parallélépipède donné par les 3 vecteurs. Son Volume est $V = \left| \vec{F} \cdot (\Delta u T_u \times \Delta v T_v) \right|$.

$\left| \vec{F} \cdot (\Delta u T_u \times \Delta v T_v) \right|$ est la quantité du fluide qui traverse la surface en temps unité. donc $\iint_{\Sigma_i} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ est le **flux** de \vec{F} à travers de Σ_i .

Exemple Flot de la chaleur

T temperatur.

to be continued

3.4.3 Digression – Interprétation physique de $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$

Thermodynamique

Exemple S surface, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, température, $\in \mathbb{R}$ une constante.

Le flot de chaleur = $\vec{F} = -k\nabla T$

Calculer le flux de F

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = - \iint_S (2x, 2y, 2z) \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy = -2 \iint_S dx dy = -2 \text{Aire}(S) = -8\pi$$

Électromagnétisme S surface fermé, \vec{E} le champ électrique, Q charge continue dans S .

Loi de Gauss : $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = Q$

Exemple $\vec{E} = E\vec{n}$, \vec{n} normale à S . Loi de Gauss :

$$\iint_S E\vec{n} \cdot d\vec{\sigma} = E \iint_S d\sigma = E \text{Aire}(S) = Q \Rightarrow \frac{Q}{\text{Aire}(S)}$$

Cas particulier : Charge ponctuelle et S Sphère (cf. cours de physique générale).

Résumé S Surface paramétrisée.

$$(a) \iint_S f d\sigma = \iint_D f(\varphi(u, v)) \left\| \vec{T}_v \times \vec{T}_u \right\| du dv$$

$$(b) \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot (\vec{T}_v \times \vec{T}_u) du dv$$

Deux cas particuliers

1) C'est un graphe : $S = \{(x, y, g(x, y)) | (x, y) \in D\}$

$$(a) \iint_S f d\sigma = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \frac{\partial g^2}{\partial x} + \frac{\partial g^2}{\partial y}} du dv$$

$$(b) \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) dx dy$$

2) C'est une sphère de rayon r :

$$d\sigma = r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$d\vec{\sigma} = \vec{r} r \sin \varphi d\varphi d\theta$$

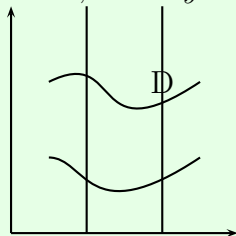
3.4.4 Théorème de Green

(en 2 dimensions)

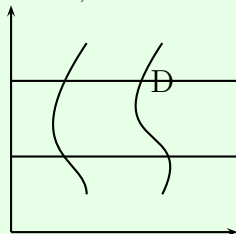
$$\int_{\partial D^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Définition

1. $D \subset \mathbb{R}^2$, D est y -simple si elle est de la forme suivante :



2. $D \subset \mathbb{R}^2$, D est x -simple si elle est de la forme suivante :



3. $D \subset \mathbb{R}^2$, D est simple $\Leftrightarrow D$ est simultanément x -simple et y -simple.

4. Orientation on note ∂D^+ , règle le domaine est à gauche du sens de parcours.

Lemme 1 D une région y -simple, $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Alors

$$\int_{\partial D^+} P \, dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy$$

Démonstration D'une part

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy = \int_a^b (P(x_1\varphi_1(x)) - P(x_1\varphi_2(x))) \, dx \quad (3.1)$$

d'autre part.

$$\int_{\partial D^+} P \, dx = \int_{C_1^+} + \underbrace{\int_{B_1^+}}_{=0} + \int_{C_2^+} + \underbrace{\int_{B_2^+}}_{=0} \quad (3.2)$$

Paramétrisation :

$x \mapsto (\varphi_1(x), x)$ pour C_1^+

$x \mapsto (\varphi_2(x), x)$ pour C_1^-

$x \rightarrow i$ sauf changer le signe

$d\vec{\sigma} = \vec{r} \, r \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$

$$3.2 = \int_a^b P(x_1\varphi_1(x)) \, dx - \int_a^b P(x_1\varphi_2(x)) \, dx \quad (3.3)$$

En comparant 3.1 et 3.3 on a $\int_{\partial D^+} P \, dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}$

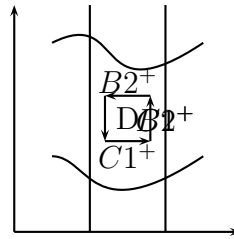
Lemme 2 D une région x -simple

$Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$

Alors :

$$\int_{\partial D^+} Q \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy$$

Démonstration



d'une part :

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \right) dy = \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy \quad (3.4)$$

d'autre part :

$$\int_{\partial D^+} Q dy = \underbrace{\int_{C_1^+} Q dy}_{=0} + \int_{B_1^+} Q dy + \underbrace{\int_{C_2^+} Q dy}_{=0} + \int_{B_2^+} Q dy \quad (3.5)$$

$y \mapsto (\psi_1(y), y)$ est une paramétrisation de B_1^+
 $y \mapsto (\psi_2(y), y)$ est une paramétrisation de B_2^-

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy \quad (3.6)$$

En comparant 3.4 et 3.6 on obtient

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D^+} Q dy$$

Reihenfolge ?

Reihenfolge ?

Théorème de Green Soit D un domaine simple (=élémentaire),
 soit $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$

Alors

$$\int_{\partial D^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Démonstration D est simultanément x -simple et y -simple donc lemme 1 et 2 sont applicables. ■

Généralisation Le Théorème de Green est encore valide pour des domaines qui sont des réunion finies de domaines simples. Exemple :

Ici il manque un image

Corollaire

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} (x \, dy - y \, dx)$$

Démonstration Soit $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, alors

$$\int_{\partial D^+} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

devient

$$\int_{\partial D^+} (-y \, dx + x \, dy) = \iint_D (1 - (-1)) \, dx \, dy = 2 \text{Aire}(d)$$

Forme vectorielle du théorème de Green $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$

$$\int_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{k} \, dx \, dy$$

Démonstration

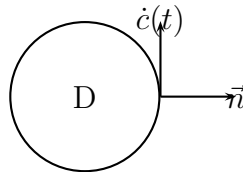
$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial D^+} P \, dx + Q \, dy, \quad \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} \, dx \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

Corollaire - Théorème de la divergence dans le plan

$$\int_{\partial D^+} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dy = \iint_D (\operatorname{div} \vec{F}) dx dy$$

Démonstration On va utiliser le Théorème de Green. $\vec{F} := Pi + Qj$



$$c(t) = (x(t), y(t)), \dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

$$\vec{n} = \frac{\dot{x}(t) - \dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}$$

$$\text{Il faut que } \det(\vec{n}, \dot{c}(t)) > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \dot{y} & x \\ -\dot{x} & y \end{vmatrix} = \dot{y}^2 + \dot{x}^2 > 0 \text{ (OK!)}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds &= \int_a^b (P, Q) \cdot \frac{\dot{y} - \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_a^b (P, Q) \cdot (\dot{y} - \dot{x}) dt = \int_a^b (P\dot{y} - Q\dot{x}) dt \\ &= \int_{\partial D^+} (P dy - Q dx) \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{=\operatorname{div} F} dx dy \end{aligned}$$

■

Théorème de Stokes (Généralisation du Théorème de Green)

Soit $z = f(x, y) \in C^2$

D un domaine simple.

$\Sigma = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$
 $\vec{F} \in C^1$ champ vectoriel.

Alors

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma}$$

Démonstration $\vec{F} = F_1i + F_2j + F_3k,$

$$\text{rot } F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$d\vec{\sigma} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$$

D'une part

$$\iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (1) \right] dx dy$$

D'autre part

Ici il manque un image

Si $c(t) = (x(t), y(t))$ est une paramétrisation de ∂D , alors $p(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ est une paramétrisation de $\partial\Sigma$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{\partial\Sigma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b (F_1 x + F_2 z + F_3 z) dt \\ &= \int_a^b (F_1 x + F_2 z + F_3 \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)) dt = \int_C \underbrace{(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x})}_P dx + \underbrace{(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y})}_Q dy \\ \text{Green :} &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}) \right) dx dy = \dots \\ &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

Donc en comparant 3.4.4 et 3.7 on obtient le résultat.

■

Généralisation Le théorème de Stokes est encore vrai si Σ est un morceau de surface lisse.

Corollaire Si Σ est une surface fermée, alors

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

Démonstration $\partial\Sigma = \emptyset$

■

Exemple $F(x, y, z) = (y, -x, +e^{xz})$

Si S est une sphère coupé par un plan $|e|$ que son bord est le cercle de rayon 1, calculer

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma}$$

Ici il manque un image

Par Stokes on a

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, \dots)(-\sin t, \cos t, 0) dt = -2\pi$$

On remarque que le résultat ne dépend pas de la sphère choisie.

Interprétation du rotationnel Soit $\vec{F} = \vec{f}$ = champ de vecteur vitesse d'un fluide.

$p \in \mathbb{R}^3$, S_p = disque de centre p , de rayon r

\vec{n} = vecteur normal à S_p .

Ici il manque un image

$$\iint_{S_p} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \begin{cases} \xrightarrow{\text{Stokes}} = \int_{\partial S_p} \vec{v} \cdot d\vec{s} \\ \xrightarrow{\text{Thm. de la moyenne}} = \text{rot } \vec{v}(X) \text{Aire}(S_p), \text{ où } Q \in S_p \end{cases}$$

$$\text{Donc } \int \partial S_p \vec{v} \cdot ds = \text{Aire}(S_p) \text{rot } v(Q)$$

$$\text{Donc } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Aire}(S_p)} \int_{\partial S_p} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \text{rot } \vec{V}(P) \cdot \vec{n}.$$

Le rotationnel de \vec{V} en Q , mesure la circulation de \vec{V} par unité d'aire sur une surface perpendiculaire à n .

- $\int \vec{v} \cdot ds$ représente la circulation de \vec{v} le long de ∂S_p .
- Elle est maximale lorsque $\text{rot } \vec{v}(P) \cdot \vec{n}$ est maximal : lorsque $\vec{n} = \frac{\text{rot } \vec{v}(P)}{\|\text{rot } \vec{v}(P)\|}$

Donc $\text{rot } \vec{v}$ est la direction autour de laquelle le fluide a la plus grande vitesse de rotation.

Ici il manque un image

3.4.5 Équations de Maxwell

Exemple La loi de FARADAY

\vec{E} champ électrique

\vec{B} champ magnétique

Une des équation de Maxwell :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}$$

Démonstration de la loi de Faraday

$$\text{Voltage } V := \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\partial S = C$$

Solution

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{\sigma}$$

Si on peut interchanger $\frac{\partial}{\partial t}$ et \iint on

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\sigma} \stackrel{\text{equ}}{=} \iint_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{\sigma}$$

■

Exemple Loi d'Ampère (avec courant de déplacement)

\vec{D} champ de déplacement électrique

\vec{H} champ magnétique

\vec{j} densité du courant

Une des équation de Maxwell.

$$\boxed{-\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \text{rot } \vec{H} = \vec{j}}$$

Demonstration de la loi d'Ampère généralisée

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{\sigma}, \quad C = \partial S$$

Solution

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{\sigma} \stackrel{\text{equ.}}{=} \iint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{\sigma}$$

Les équation de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{Loi de Gauss existence de la charge électrique}) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{inexistence des monopoles}) \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad (\text{Loi de Faraday}) \\ -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{Loi d'Ampère}) \\ \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{Loi de la continuité - corollaire des 4 autres}) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Lien avec la mécanique

$$\vec{F} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

La li d'Ampère classique

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \Rightarrow 0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{h} = \operatorname{div} \vec{j} \neq 0 \text{ en général existent des cap.}$$

$$\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_{\rho} = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

Pour matériaux homogènes :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

3.4.6 Théorème de divergence de Gauss

On va considérer des régions dans \mathbb{R}^3 qui sont réunions finies des régions élémentaires.

Région élémentaire : 4 directions planes, 2 directions graphes.

(On a donc 3 possibilités pour les trois dimension)

Théorème W élémentaire

∂W surface orientée par la normale extérieure

\vec{F} champ vectoriel de class C^1 .

Alors

$$\iiint_W = (\operatorname{div} \vec{F}) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\partial W} (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, d\sigma$$

Démonstration On prend une situation de vol. élémentaire. Disons : $z = g_1(x, y)$, $z = g_2(x, y)$

$$\begin{aligned}\vec{F} = Pi + Qj + Rk &\Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\ &\Rightarrow \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_W \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz + \iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy \, dz + \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

D'autre part

$$\iint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\partial W} (Pi + Qj + Rk) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\partial W} P(i \cdot \vec{n}) \, d\sigma + \iint_{\partial W} Q(j \cdot \vec{n}) \, d\sigma + \iint_{\partial W} R(k \cdot \vec{n}) \, d\sigma =$$

Nous allons démontrer que :

$$\begin{aligned}\iint_{\partial W} P(i \cdot \vec{n}) \, d\sigma &= \iiint_W \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \\ \iint_{\partial W} Q(j \cdot \vec{n}) \, d\sigma &= \iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy \, dz \\ \iint_{\partial W} R(k \cdot \vec{n}) \, d\sigma &= \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

Ici la troisième équation est la plus difficile à démontrer :

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_D \left(\int_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \right) \, dx \, dy$$

Où D est une région simple dans \mathbb{R}^2 la projection de W sur \mathbb{R}^2 .

$$= \iint_D \left(R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y)) \right) \, dx \, dy$$

W a six faces : S_1, \dots, S_6

$$\begin{aligned}S_1 &= \text{graphe de } z = g_1(x, y) \\ S_2 &= \text{graphe de } z = g_2(x, y) \\ S_3, \dots, S_6 &= \text{les autres faces étroites}\end{aligned}$$

Donc

$$\iint_{\partial W} R(k \cdot \vec{n}) \, d\sigma = \iint_{S_1} R(k \cdot \vec{n}_1) \, d\sigma + \iint_{S_2} R(k \cdot \vec{n}_2) \, d\sigma + \sum_{i=3}^6 \iint_{S_i} \underbrace{R(k \cdot \vec{n}_i)}_{=0} \, d\sigma$$

\vec{n} normale extérieure à la surface

$$= \iint_{S_1} R(k \cdot \vec{n}) \, d\sigma + \iint_{S_2} R(k \cdot \vec{n}) \, d\sigma$$

Soit S_1 le graphe de $z = g_1(x, y)$.

$$d\vec{\sigma} = \vec{n}_1 \, d\sigma_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} i + \frac{\partial g}{\partial y} j - k \right) dx \, dy$$

C'est le négatif de la formule habituelle parce que la normale extérieure à W aux points de S_1 est en bas.

$$\iint_{S_1} R(k \cdot \vec{n}_1) \, d\sigma_1 = - \iint_D R(x, y, g_1(x, y)) \, dx \, dy$$

Pour S_2 , le graphe de $z = g_2(x, y)$ on fait la même chose, sauf que $n_2 = -\frac{\partial g_2}{\partial x} i - \frac{\partial g_2}{\partial y} j + k$

$$\iint_{S_2} R(k \cdot \vec{n}_2) \, d\sigma_2 = \iint_D R(x, y, g_2(x, y)) \, dx \, dy \Rightarrow \iint_{\partial W} R(k \cdot \vec{n}) \, d\sigma = \iint_D \left(R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y)) \right) dx \, dy$$

Commentaire:
wieso gilt das auch für die beiden anderen Fälle? denn da ist n nicht immer senkrecht auf die krumme flaeche...

■

Exemple Calculer $\iint_{\partial W} x^2 + y + z \, d\sigma$ où $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Solution 1.) On peut le faire directement en utilisant la définition.

2.) On applique Gauss

Donc il faut trouver \vec{F} tel que $\vec{F} \cdot \vec{n} = x^2 + y + z$, \vec{n} sur $S^2 = \partial W$ est $\vec{n} = xi + yi + zk$.

On peut choisir $F_1 = x$, $F_2 = 1$, $F_3 = 1$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = x^2 + y + z$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} (xi + j + k) = 1$$

Donc

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z) d\sigma = \iint_{\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_W dx dy dz = \frac{4}{3}\pi$$

3.4.7 Interprétation géométrique de la divergence

$\operatorname{div} \vec{F}(P)$ est le changement du flux en P sur le volume unité.

W_ρ : Boule de rayon ρ , centre P .

$$\iint_{\partial W_\rho} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_{W_\rho} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz \stackrel{\text{Thm. de la moyenne}}{=} (\operatorname{div} \vec{F})(Q) \operatorname{volume}(W_\rho), Q \in W_\rho$$

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{div} \vec{F}(Q) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{volume}(W_\rho)} \iint_{\partial W_\rho} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

3.4.8 Théorème du gradient

Théorème $f \in C^1$

$$\iiint_W \nabla f dx dy dz = \iint_{\partial W} f d\vec{\sigma}$$

Lemme

$$\iiint_W \nabla f \cdot \vec{d} dx dy dz = \iint_{\partial W} f \vec{d} \cdot \vec{n} d\vec{\sigma}$$

Démonstration

$$\iiint_W \nabla f \cdot \vec{d} dx dy dz = \iiint_W \operatorname{div} (f \vec{d}) dx dy dz$$

avec

$$\operatorname{div} (f\vec{d}) = \nabla f \cdot \vec{d} + f \underbrace{\operatorname{div} \vec{d}}_{=0}$$

on a

$$\stackrel{\text{Gauss}}{=} \iint_{\partial W} f \vec{d} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

■

Démonstration du théorème On prend $\vec{d} = i, j, k$

$$\nabla f \cdot i = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \nabla f \cdot j, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \nabla f \cdot k$$

$$\text{Si } \vec{n} = n_x i + n_y j + n_z k$$

$$i \cdot \vec{n} = n_x, \quad j \cdot \vec{n} = n_y, \quad k \cdot \vec{n} = n_z$$

$$\Rightarrow \iiint_W \frac{\partial f}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{Lemme}}{=} \iiint_W (\nabla f \cdot i) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} f i \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\partial W} f n_x \, d\sigma$$

On multiplie avec i

$$\iiint_W \nabla f \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} f \vec{d} \, d\sigma$$

■

3.4.9 Théorème du rotationnel

Théorème $\vec{F} \in C^1$

$$\iiint_W \operatorname{rot} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = - \iint_{\partial W} \vec{F} \times \vec{d} \, d\sigma$$

Lemme

$$\iiint_W \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{d} \, dx \, dy \, dz = - \iint_{\partial W} (\vec{F} \times \vec{n}) \cdot \vec{d} \, d\sigma$$

Démonstration $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$

On prend $\vec{G} = \vec{d}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{d}) &= \vec{d} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \underbrace{\vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{d}}_{=0} \\ \Rightarrow \iiint_W \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{d} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_W \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{d}) \, dx \, dy \, dz \\ \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iint_{\partial W} (\vec{F} \times \vec{d}) \cdot \vec{n} \, d\sigma &= - \iint_{\partial W} (\vec{F} \times \vec{n}) \cdot \vec{d} \, d\sigma \end{aligned}$$

Démonstration du Théorème On utilise le lemme avec $\vec{d} = i, j, k$

$$\begin{aligned} \iiint_W \operatorname{rot} \vec{f} \, dx \, dy \, dz &= \\ \left(\iiint_W (\operatorname{rot} \vec{F} \cdot i) \, dx \, dy \, dz \right) i + \left(\iiint_W (\operatorname{rot} \vec{F} \cdot j) \, dx \, dy \, dz \right) j + \left(\iiint_W (\operatorname{rot} \vec{F} \cdot k) \, dx \, dy \, dz \right) k \\ &\stackrel{\text{Lemme}}{=} \\ \left(- \iint_{\partial W} (\vec{F} \times \vec{n}) \cdot i \, d\sigma \right) i + \left(- \iint_{\partial W} (\vec{F} \times \vec{n}) \cdot j \, d\sigma \right) j + \left(- \iint_{\partial W} (\vec{F} \times \vec{n}) \cdot k \, d\sigma \right) k \\ &= - \iint_{\partial W} (\vec{F} \times \vec{n}) \, d\sigma = - \iint_{\partial W} \vec{F} \times d\vec{\sigma} \end{aligned}$$

Exemple *Loi d'Archimede.*

V volume dans un fluide de pression $p(x, y, z)$. La force exercée sur l'élément de surface $d\sigma$ de ∂W est donnée par $-p\vec{n} \, d\sigma = -\rho \, d\vec{\sigma}$. Ainsi la force totale

$$\vec{F} = \iint_{\partial W} (-p) \, d\vec{\sigma} \stackrel{\text{Th. du grad.}}{=} - \iiint_W \nabla p \, dx \, dy \, dz$$

Supposons que la densité est constante. donc on a un fluide incompressible. Alors $p = \rho g z$, g accélération gravitationnelle et ρ a été choisie telle que $\rho = 0$ à la surface du liquide ($z = 0$). Donc

$$\vec{F} = \iiint_W \rho g k \, dx \, dy \, dz = \rho g k \iiint_W dx \, dy \, dz = \underbrace{\rho \operatorname{Volume}(W)}_{\text{masse}} g k$$

La force exercée sur W est égale au poids du fluide déplacé par W .

Exemple *Equation du continuité*

Fluide dans le volume W de vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$ et densité $\rho(x, y, z, t)$.

Bilan de masse du fluide qui traverse W entre t et $t + \Delta t$.

Masse du fluide entrant :

Morceau de surface $d\sigma$ sur ∂W .

$\vec{v} \cdot \vec{n}$ partie de la vitesse qui compte.

$(\vec{v} \cdot \vec{n})\Delta t$ est la distance parcourue par le fluide.

Volume qui entre : $(\vec{V} \cdot \vec{n})\Delta t d\sigma$

Masse qui entre : $\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\Delta t d\sigma$

Donc la masse totale qui entre W est

$$- \iint_{\partial W} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\Delta t d\sigma$$

le signe est $-$ car $-(\vec{V} \cdot \vec{n})\vec{n}$ est la partie de la vitesse, en tant que vecteur, qui compte.

On applique Gauss :

$$- \iint_{\partial W} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\Delta t d\sigma = \iiint_W \operatorname{div}(\rho\vec{V})\Delta t dx dy dz$$

Mais, l'accroissement de la masse est :

$$\iiint_W (\rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t)) dx dy dz$$

$$\Rightarrow \Delta t \left(\iiint_W \operatorname{div}(\rho\vec{V}) dx dy dz \right) + \iiint_W (\rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t)) dx dy dz$$

$\Delta t \operatorname{div}(\rho\vec{V}) + \rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t) = 0$ car W est arbitraire.

$$\boxed{\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\vec{V}) = 0}$$

3.4.10 Loi de Gauss

Théorème Soit $W \in \mathbb{R}^3$ région élémentaire dans \mathbb{R}^3 .
Si $(0, 0, 0) \notin \partial W$ alors

$$\iint_{\partial W} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} d\sigma = \begin{cases} 4\pi & (0, 0, 0) \in W \\ 0 & (0, 0, 0) \notin W \end{cases}$$

Démonstration

1. Soit $(0, 0, 0) \notin W$, alors $\frac{\vec{r}}{r} \in C^1$ sur W et ∂W . Par Théorème de Gauss (divergence) :

$$\iint_{\partial W} \frac{\vec{r}}{r} d\vec{\sigma} = \iiint_W \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} dx dy dz$$

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \dots = \frac{r^3 - 3x^2r}{r^4}$$

$$\operatorname{div} (\vec{r})r^3 = \frac{1}{r^6}(r^3 - 3x^2r + r^3 - 3y^2r + r^3 - 3z^2r) = \frac{1}{r^6}(3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)) = \frac{1}{r^6}(3r^3 - 3r^3) = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial W} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} d\sigma = 0$$

2. $(0, 0, 0) \in W$, en $(0, 0, 0)$ $\frac{\vec{r}}{r^3}$ n'est pas de $C^1 \Rightarrow$ on ne peut pas appliquer le Théorème de GAUSS sur W .

$B(\vec{0}, \epsilon)$ Boule autour de $(0, 0, 0)$.

$V := W \setminus B(\vec{0}, \epsilon)$

Maintenant $\frac{\vec{r}}{r^3} \in C^1$ sur V et le Thm. de Gauss est applicable

$$\Rightarrow 0 = \iiint_V \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} dx dy dz = \iint_{\partial V} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\partial W} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n}_1 d\sigma + \iint_{\partial B(\vec{0}, \epsilon)} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n}_2 d\sigma =$$

avec $\vec{n}_2 = \frac{-\vec{r}}{r}$, ($r = \epsilon$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_{\partial W} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma &= - \iint_{\partial B(\vec{0}, \epsilon)} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n}_2 \, d\sigma = - \iint_{\partial B(\vec{0}, \epsilon)} -\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^4} \, d\sigma \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\partial B(\vec{0}, \epsilon)} \frac{\epsilon^2}{\epsilon^4} \, d\sigma = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\partial B(\vec{0}, \epsilon)} \, d\sigma = \frac{1}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 = 4\pi \end{aligned}$$

■

3.4.11 Formule de Green

Théorème φ, ψ champs scalaires de classe C^2 (dans $W \subset \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad - \iiint_W (\Delta\varphi)\psi \, dx \, dy \, dz &= \iiint_W \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \psi \, d\sigma \\ &\text{où } \vec{n} \text{ normale extérieure à } \partial W, \frac{\partial\varphi}{\partial n} := \nabla\varphi \cdot \vec{n} \\ \text{(ii)} \quad \iiint_w (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi) \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\partial W} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) d\sigma \end{aligned}$$

Démonstration

(i)

$$\operatorname{div}(\psi \nabla\varphi) = \psi \Delta\varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iiint_W \operatorname{div}(\psi \nabla\varphi) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_W \psi \Delta\varphi \, dx \, dy \, dz + \iiint_W \nabla\psi \cdot \nabla\varphi \, dx \, dy \, dz \\ &= \iint_{\partial W} \psi \underbrace{\nabla\varphi \cdot \vec{n}}_{\frac{\partial\varphi}{\partial n}} \, d\sigma \\ &= \iint_{\partial W} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, d\sigma \end{aligned}$$

(ii) Par (i) :

$$\left. \begin{aligned} - \iiint_W (\Delta\varphi)\psi \, dx \, dy \, dz &= \iiint_W \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx \, dy \, dz - \iint_{\partial W} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, d\sigma \quad (1) \\ - \iiint_W (\Delta\psi)\varphi \, dx \, dy \, dz &= \iiint_W \nabla\psi \cdot \nabla\varphi \, dx \, dy \, dz - \iint_{\partial W} \frac{\partial\psi}{\partial n} \, d\sigma \quad (2) \end{aligned} \right\}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \iiint_W (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial W} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) \, d\sigma$$

■

Théorème \vec{F} champ vectoriel de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ à l'exception d'un nombre fini de points.

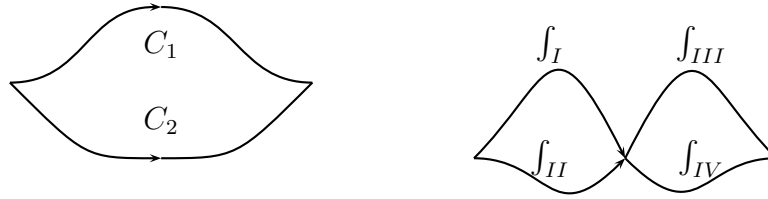
Alors les conditions suivantes sont équivalents :

- (i) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0$ pour chaque courbe fermée, simple et orientée
- (ii) $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ pour chaque deux courbes simples et orientées avec les mêmes extrémités
- (iii) $\exists f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ telle que $\vec{F} = \nabla f$
(f n'est pas défini aux points exceptionnelles (singulier ?) de \vec{F})
- (iv) $\text{rot } \vec{F} = 0$

On appelle ça un **champ conservatif**.

Démonstration (i) \rightarrow (ii)

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} \Rightarrow \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$$



$$(1) \Rightarrow \int_I = \int_{II} ; \int_{III} = \int_{IV}$$

$$\int_{C_1} = \int_I + \int_{IV} = \int_{II} + \int_{III} = \int_{C_2}$$

Démonstration (ii) \rightarrow (iii)

$\int_C \vec{F} d\vec{\sigma}$ ne dépend pas du chemin C .

Soit $\varphi(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x,y,z)} \vec{F} d\vec{\sigma}$. $\vec{F} = F_1i + F_2j + F_3k$. On a

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial z} &= F_3(x, y, z) \\ \frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial y} &= F_2(x, y, z) \\ \frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial x} &= F_1(x, y, z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \varphi = \vec{F}$$

Démonstration (iii) \rightarrow (iv)

$$\text{rot}(\nabla \varphi) = 0$$

Démonstration (iv) \rightarrow (i) S Surface avec le bord ∂S et $\vec{F} \in C^1$

$$\iint_S \underbrace{\text{rot} \vec{F}}_{=0} d\vec{\sigma} = \int_{\partial S} \vec{F} d\vec{\sigma} = 0$$

C est toujours ∂S pour un $S \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Nombre fini des points}\}$.

Définition $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est simplement connexe si Ω est connexe et \forall courbe fermée C on peut être déformé de façon continue en un point $P \in \Omega$. (ie. une sphère ou une sphère vide est simplement connexe, un tore ne l'est pas)

Théorème $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine continue, \vec{F} champ vectoriel continue. Alors

1. (F est conservatif $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \forall C$ fermée simple orientée) $\Rightarrow \vec{F} = \nabla\varphi$
2. $F \in C^1$ et F conservatif $\Rightarrow \text{rot } \vec{F} = 0$
3. $F \in C^1$, $\text{rot } F = 0$ et Ω est simplement connexe $\Rightarrow \vec{F}$ est conservatif.

Dimension 2 Si Ω est simplement connexe \Rightarrow pas des points exceptionnels.

Théorème $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$; $\vec{F} = Pi + Qj$, t.q. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
Alors $\vec{F} = \nabla f$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

Démonstration

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k = 0 \Rightarrow \text{Formule de Green} \\ \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \\ \Rightarrow \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= 0 \quad (\mathbb{R}^2 \text{ est simplement connexe}) \\ \Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= 0 \quad \forall C \text{ fermée et orientée simple} \\ f &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{ne dépend pas du chemin} \Rightarrow \nabla f = \vec{F}. \\ f(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(0,y)} Q(0,t) dt + \int_{(0,y)}^{(x,y)} P(t,y) dt \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = P \end{aligned}$$

■

Exemple

$$\vec{F} = \frac{xi + yi}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = Pi + Qj$$

F n'est pas défini en $(0, 0)$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \dots = \frac{-3xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Mais $\vec{F} = \nabla\varphi$ où $\varphi = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

△

Remarque Il est possible que la condition est vrai même si on a des points exceptionnels.

Exemple

$$\vec{F} = \frac{-yi + xj}{x^2 + y^2}$$

$(0, 0)$ est un point exceptionnel.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \dots = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\int_{C=(\cos t, \sin t)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \frac{\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t)}{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

△

Définition $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est **2-connexe** si \forall surfaces S fermées orientés ¹ peut être déformée de façon continue en un point quelconque $P \in \Omega \Leftrightarrow (S$ est un bord d'un volume $W \subset \Omega)$.

(i.e. sphère oui, sphère vide non, tore oui)

Théorème \vec{F} est continue dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

1. $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \forall S$ fermée $\subset \Omega \Rightarrow \exists \vec{G} \in C^1(\Omega); \vec{F} = \text{rot } \vec{G}$.
 \vec{F} est à flux nul dans Ω
2. $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \forall S$ fermée $\subset \Omega, \vec{F} \in C^1(\Omega) \Rightarrow \text{div } \vec{F} = 0$ dans Ω .
3. $\vec{F} \in C^1(\Omega), \text{div } \vec{F} = 0$ et Ω est 2-connexe $\Rightarrow \vec{F}$ est à flux nul dans Ω .

Démonstration $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0$. Soit $\vec{F} = F_1i + \dots + F_3k$. On définit $\vec{G} = G_1i + G_2j + G_3k$ où

$$\begin{cases} G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt \\ G_2(x, y, z) = -\int_0^z F_1(x, y, t) dt \\ G_3(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{G} &= \frac{\partial G_1}{\partial z}i + \frac{\partial G_2}{\partial z}j + \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)k \\ &= F_1(x, y, z)i + F_2(x, y, z)j + \left(-\int_0^z \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y, t) dt - \int_0^z \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y, t) dt + F_3(x, y, 0)\right)k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sur } k : & \int_0^z \left(-\frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial t} F_3(x, y, t)\right) dt + \int_0^z \frac{\partial}{\partial t} F_3(x, y, t) dt + F_3(x, y, 0) \\ &= \int_0^z (-\text{div } F(x, y, t)) dt + F_3(x, y, z) \underbrace{-F_3(x, y, 0) + F_3(x, y, 0)}_{=0} = F_3(x, y, z) \end{aligned}$$

Théorème de GAUSS : $\forall W \subset \Omega : \iiint_W \text{div } \vec{F} dx dy dz = \iint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{F} = 0$ dans $\Omega \Rightarrow$ (1) et (2).

(3) Si Ω est 2-connexe $\Rightarrow \forall S$ fermée orientée est un bord d'un volume W

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_W \vec{F} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_W \text{div } \vec{F} dx dy dz = 0$$



Corollaire Si Ω est 2-connexe, $F \in C^1(\Omega)$, alors

$$\vec{F} \text{ est à flux nul dans } \Omega \Leftrightarrow \vec{F} = \text{rot } \vec{G} \Leftrightarrow \text{div } \vec{F} = 0 \text{ dans } \Omega .$$

Exemple Nr. 1

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \quad \vec{V} = \frac{\vec{r}}{r^2}, \quad \vec{r} = xi + yj + zk, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \dots = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \\ \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \dots = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \\ \frac{\partial V_z}{\partial z} &= \dots = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{r^3} = \dots = \frac{-3xz}{r^5} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} &= \dots = \frac{-3xy}{r^5} \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} &= \dots = \frac{-3yz}{r^5} \end{aligned}$$

$$\text{rot } V = \dots = 0$$

$$\text{div } V = \dots = 0$$

- Ω est simplement connexe, $\text{rot } F = 0 \Rightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : \vec{F} = \nabla \varphi, \varphi = \frac{-1}{r}$
- Ω n'est pas 2-connexe :

$$\iint_S \vec{F} \, d\vec{\sigma} = \iint_S \frac{r^3}{r} \vec{d}\vec{\sigma} \stackrel{\text{loi de Gauss}}{=} \iint_S d\sigma = 4\pi i \neq 0 \quad \text{où } S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

△

Exemple Nr. 2

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0z\}$$

$$V = \frac{-yi+xj}{x^2+y^2} \in C^\infty$$

- $\text{rot } V = 0$
- $\text{div } V = 0$
- Ω est 2-connexe

$$\Rightarrow V = \text{rot } U.$$

$$U = -\ln \sqrt{x^2 + y^2} k$$

$$\text{rot } U = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & -\ln \sqrt{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \dots = -\frac{\partial_y r}{r} i + \frac{\partial_x r}{r} j = -\frac{y}{r^2} i + \frac{x}{r^2} j = V$$

Par contre, il n'existe pas de potentiel f t.q. $\vec{V} = \nabla f$.

Si C est le cercle unité dans le plan $0xy$ centré à 0, on a

$$\int_C \nabla \cdot d\vec{s} = 2\varphi$$

Mais, c'est en contradiction avec le fait (si vrai) que $V = \nabla f$, car $\int_C f \cdot d\vec{s} = 0$.
Il faut s'attendre car Ω n'est pas simplement connexe.

△

Exemple Nr. 3

Soit

$$F(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^8 10^i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

où $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_8$ sont 8 points différents dans \mathbb{R}^3 . Si S est une surface fermée telle que

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 11010,$$

qui sont les points dans le corps du bord S ?

Solution On applique la loi de Gauss

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^8 10^i \iint_S \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} \cdot \vec{n} \, d\sigma \stackrel{\text{Loi de Gauss}}{=} \sum_{i=1}^8 10^i \begin{cases} 1 & \vec{x}_i \in W, \partial W = S \\ 0 & \vec{x}_i \notin W, \partial W = S \end{cases}$$

$$r_1, r_3, r_4 \in W, \quad r_2, r_5, \dots, r_8 \notin W$$

△

Exemple \vec{F} , $\varphi(\vec{r}, t)$ sont flot, c. à. d.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi(\vec{r}, t) = \vec{F}(\varphi(\vec{r}, t)) \\ \varphi(\vec{r}, 0) = \vec{r} \end{cases}$$

$$J(\vec{r}, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Alors ²

$$\frac{d}{dt} J(\vec{r}, t) = \operatorname{div} \left[\vec{F}(\varphi(\vec{r}, t)) \right] J(\vec{r}, t)$$

Solution

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\vec{r}, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial t} & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + |\dots| + |\dots|$$

Soit $(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(x, y, z, t)$.

$$\underbrace{\quad}_{\text{un long calcul!}} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \frac{\partial F_2}{\partial \eta} + \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} \right) J = (\operatorname{div} \vec{F}) J$$

△

Surface fermée image de la sphère unité dans \mathbb{R}^3 par une application continue injective.

\vec{F} Champ vectoriel, $\varphi(\vec{r}, t)$ son flot, c.à.d. $\frac{d}{dt} = \vec{F}(\varphi(\vec{r}, t))$. ($t \mapsto \varphi(\vec{r}, t)$ est la courbe int. qui à $t = 0$ commence en \vec{r} .) $J(\vec{r}, t) = \det$ Jacobien de $\varphi(\vec{r}, t)$ selon \vec{r} .

Alors

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\vec{r}, t) = [\operatorname{div} \vec{F}(\varphi(\vec{r}, t))] J(\vec{r}, t)$$

Exemple Théorème de Transport $W \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in C^1$ champ vectoriel, $\varphi(\vec{r}, t)$ flot de \vec{F} , $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$$W_T := \varphi_t(W), \quad \varphi_t(\vec{r}) := \varphi(\vec{r}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} f(\vec{r}, t) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \vec{F} \right) \, dx \, dy \, dz$$

où

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{F} \cdot \nabla) f$$

dénote la dérivée matérielle, la dérivée selon le champ \vec{F} .³

Solution Changement des variables

$$\iiint_{\varphi(W)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_W F(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw$$

On applique cette formule en changeant les variables

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \varphi_t(\vec{p}) \\ \vec{p} &\in W \\ \vec{r} &\in W_t = \varphi_t(W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \iiint_{W_t} f(\vec{r}, t) dx dy dz \\
= & \pm \frac{d}{dt} \iiint_W f(\varphi_t(\vec{p}), t) J(\vec{p}, t) du dv dw \\
= & \pm \iiint_W \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi_t(\vec{p}), t) + \nabla f(\varphi_t(\vec{p}), t) \cdot \frac{\partial \varphi_t(\vec{p}, t)}{\partial t} \right) J(\vec{p}, t) + f(\varphi_t(\vec{p}), t) \frac{\partial J(\vec{p}, t)}{\partial t} \right] du dv dw \\
= & \pm \iiint_w \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div} \vec{F} \right) (\varphi(\vec{p})) \right] J(\vec{r}, t) du dv dw \\
& \text{Changement de variables pour revenir à la variable } \vec{r} = (x, y, z) \\
= & \iiint_{W_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f(\operatorname{div} \vec{F}) \right) (\vec{r}) dx dy dz
\end{aligned}$$

■

Malheureusement on ne fait ni Euler ni Lagrange ici – mais on traite les ondes :

Prediction des ondes radio On retourne aux equ. de Maxwell. On simplifie en posant $\epsilon = \mu = 1$. Cf. aussi page 54.

ρ densité de charge

\vec{j} densité du courant

\vec{E} champs électrique

\vec{H} champ magnétique

$\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ Loi de Gauss

$\nabla \cdot \vec{H} = 0$ Pas de monopoles

Les équations dynamiques :

$\nabla \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$ Loi de Faraday

$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}$ Loi d'Ampère

Dans le vide : $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$

Puisque $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ et nous sommes dans $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists \vec{A}$ t.q. $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ (\vec{A} potentiel magnétique).

Mais \vec{A} n'est pas unique : on a une liberté de jauge.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

Commentaire:
Jauge = ???

Par Faraday :

$$\begin{aligned}
 0 &= \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\
 &= \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} \\
 &= \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
 &= \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\
 &\Rightarrow \exists \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q.} \\
 &\quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi
 \end{aligned}$$

On substitue ça et $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ dans la loi d'Ampère.

$$\begin{aligned}
 \vec{J} &= \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) \\
 \text{avec} \quad & \left[\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \right] \\
 &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{J} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\vec{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \quad (3.9)$$

Par la loi de Gauss en a :

$$\rho = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = -\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\boxed{\Delta \varphi = -\rho - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A}} \quad (3.10)$$

Est-ce que c'est possible ?

Supposons qu'on a un \vec{A}_0 et un φ_0 . Est-il possible de choisir $\vec{A} = \vec{A}_0 + \nabla f$ nouveau et après un nouveau φ tels que :

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 ?$$

Avec ce nouveau \vec{A} le nouveau φ est

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 + \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} &= -\nabla \varphi_0 \\ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\nabla \varphi \\ \text{Mais} \\ \vec{E} = \vec{E}_0 \quad \text{et} \quad \vec{A} = \vec{A}_0 + \nabla f \\ \Rightarrow \vec{E}_0 + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}_0 + \nabla f) &= -\nabla \varphi \\ \Rightarrow \underbrace{\vec{E}_0 + \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla f &= -\nabla \varphi \\ \Rightarrow -\nabla \varphi_0 + \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) &= -\nabla \varphi \\ \Rightarrow -\nabla \left(\varphi_0 - \frac{\partial f}{\partial t} \right) &= -\nabla \varphi \end{aligned}$$

Donc le nouveau φ (à une constante près) est égale à

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Donc la condition $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ devient :

$$0 = \nabla \cdot (\vec{A}_0 + \nabla f) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_0 - \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \vec{A}_0 + \Delta f + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \vec{A}_0 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \right)} \quad (3.11)$$

Donc, pour choisir \vec{A} et φ tels que $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ il est nécessaire de résoudre 3.11 équation d'onde.

Admettons que c'est possible. Avec ces choix de \vec{A} et φ . 3.9 page précédente et 3.10 page précédente devient :

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{J}} \quad (3.12)$$

$$\boxed{\Delta \vec{\varphi} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho} \quad (3.13)$$

Inversement si 3.12 page précédente et 3.13 sont valables et si \vec{A} et φ satisfont aussi

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

alors

$$\begin{aligned} \vec{E} &:= -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{H} &:= \nabla \times \vec{A} \end{aligned}$$

et on vérifie que les équations de Maxwell sont valables. On a "réduit" les équations de Maxwell aux équations d'onde.

Exemple $\varphi(t, x, y, z) = \psi(x - t, y - t, z - t)$, avec ψ arbitraire, satisfait

$$\Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

C'est une solution qui propage le graphe de ψ en temps, on a trouvé une onde.

3.4.12 Fonctions harmoniques

Définition Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. ($n = 3$)
Une fonction $\varphi \in C^2(\Omega)$ est **harmonique** si $\Delta \varphi = 0$.

On rappelle les identités de Green :

$$\begin{aligned} \iint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma &= \iiint_{\Omega} (\psi \Delta \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) d^3x \\ \iint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma &= \iiint_{\Omega} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) d^3x \end{aligned}$$

Prenons dans la première $\psi = 1$ et $\Delta \varphi = 0$

Commentaire:
C'est quoi n ???

$$\boxed{\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0}$$

Soit ω_n l'aire de la sphère unité dans \mathbb{R}^n

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

où $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} ds$, $\operatorname{Re}(s) > 0$. La démonstration est à faire comme exercice.

Commentaire:
C'est φ'' ou π ?

Théorème $\varphi \in C^2(\Omega)$, $\Delta\varphi = 0$ dans Ω et soit $B(C, R) \subset \Omega$ la boule de centre C et rayon R .

Alors

$$\varphi(C) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B(C,R)} \varphi(x) d\sigma(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \varphi(C + Ry) d\sigma(y) \quad .$$

Où S^{n-1} dénote la surface (de dimension $n - 1$) de la sphère unité dans \mathbb{R}^n . I.e. $S^{n-1} = \partial B(0, 1)$.

Commentaire:
est-ce correct ?

Démonstration La deuxième égalité découle de la première en prenant $y \mapsto c + Ry$. En effet, si $x = C + Ry$ on a

$$\|x - c\| = \|Ry\| = R \|y\| \quad .$$

donc $x \in \partial B(C, R) \Leftrightarrow y \in S^{n-1} = \partial B(0, 1)$

$$d\sigma(x) = R^{n-1} d\sigma(Y)$$

Donc

$$\int_{S^{n-1}} \varphi(c + Ry) d\sigma(y) = \int_{\partial B(C,R)} \varphi(x) \frac{1}{R^{n-1}} d\sigma(x)$$

En composant avec une translation on peut supposer que $C = 0$. Donc il faut démontrer que

$$\varphi(0) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \varphi(x) d\sigma(x)$$

Idée On utilise la deuxième identité de Green avec φ notre fonction harmonique et

$$\psi(\varphi) = \begin{cases} \|y\|^{2-n} & \text{si } n \neq 2 \\ \log |y| & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

■

Lemme Soit $f(x) = g(r)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r = \|x\|$. Alors

$$\Delta f = g''(r) + \frac{n-1}{r}g'(r)$$

Démonstration $\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} &= g'(r) \frac{\partial r}{\partial x_j} = g'(r) \frac{x_j}{r} \\ \Delta f &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{r} g'(r) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) g'(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \frac{x_j}{r} g''(r) \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(-\frac{x_j^2}{r^3} g'(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \frac{x_j^2}{r^2} g''(r) \right) \\ &= g''(r) + \frac{n}{r} g'(r) - \frac{1}{r} g'(r) \end{aligned}$$

■

Lemme Si $f(x) = g(r)$ alors $\Delta f = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\Leftrightarrow \varphi(r) \begin{cases} a + br^{2-n} & (n \neq 2) \\ \varphi(r) = a + b \log r & (n = 2) \end{cases}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\Delta f = 0 &\Leftrightarrow \frac{g''(r)}{g'(r)} = \frac{1-n}{r} \\
&\Leftrightarrow \log g'(r) = (1-n) \log r + \log C = \log cr^{1-n} \\
&\Leftrightarrow g'(r) = cr^{1-n} \\
&\Leftrightarrow g(r) = \begin{cases} a + \frac{c}{2-n} r^{2-n} & n \neq 2 \\ a + c \log r & n = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

■

ψ est harmonique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Prenons $D = B(0, R) \setminus \overline{B(0, \epsilon)}$, $0 < \epsilon < R \Rightarrow \psi$ est harmonique en D .

Sur $S(0, R) = \partial B(0, R)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial n}(x) &= \nabla \psi(x) \cdot n(x) \\
&= \nabla \psi(x) \frac{x}{R} \quad (\|x\| = R) \\
&= (2-n)R^{1-n} \underbrace{\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{x}{R}}_1 \\
&= (2-n)R^{1-n}
\end{aligned}$$

Sur $S(0, \epsilon) = \partial B(0, \epsilon)$

$$\frac{\partial f}{\partial n}(x) = -(2-n)\epsilon^{1-n}$$

C'est un moins à cause de l'orientation.

Si $n = 2$ on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial n} &= R \quad \text{sur } S(0, R) \\
\frac{\partial \psi}{\partial n} &= -\epsilon \quad \text{sur } S(0, \epsilon)
\end{aligned}$$

On applique l'identité de Green

$$0 = \int_D (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) = \int_{\partial D} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma = \int_{S(0, R)} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma - \int_{S(0, \epsilon)} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma$$

$n \neq 2$:

$$= \underbrace{R^{2-n} \int_{S(0,R)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\epsilon^{2-n} \int_{S(0,\epsilon)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma}_{\rightarrow 0}$$

$$= -2(-n)R^{1-n} \int_{S(0,R)} \varphi d\sigma + (2-n)\epsilon^{1-n} \int_{S(0,\epsilon)} \varphi d\sigma$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^{n-1}\omega - n} \int_{S(0,R)} \varphi d\sigma = \underbrace{\frac{1}{\epsilon^{n-1}\omega_n} \int_{S(0,\epsilon)} \varphi d\sigma}_{\epsilon \rightarrow 0}, \forall \epsilon > 0$$

$\varphi(0)$ (parce que $\int_{S(0,\epsilon)} \varphi d\sigma = \varphi(P)\omega_n\epsilon^{n-1}$ pour $P \in S(0,\epsilon)$.)

$$\varphi(0) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n} \int \partial B(0,R)\varphi d\sigma.$$

Commentaire: Est cette formule correcte ?

■

Corollaire Théorème de la moyenne pour les boules
Mêmes hypothèses.

$$\varphi(c) = \frac{n}{R^n \omega_n} \int_{B(C,R)} \varphi(y) d^n y = \frac{n}{\omega_n} \int_{B(0,1)} \varphi(x + Ry) d^n y$$

Démonstration On écrit

$$\varphi(C) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \varphi(C + \rho Ry) d\sigma(y)$$

On multiplie par $\rho^{n-1} d\rho$ et on intègre.

■

3.4.13 La réciproque du théorème de la moyenne

$\varphi \in C^0(\Omega)$, Ω ouvert dans \mathbb{R}^n .

Supposons que pour chaque $c \in \Omega$ et $B(c, R) \subset \Omega$ on a

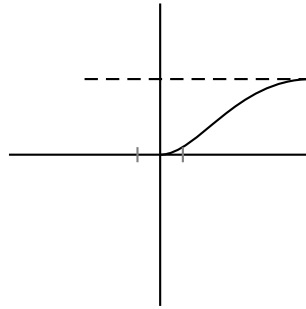
$$\varphi(c) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \varphi(c + Ry) dy \quad .$$

Alors $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ et φ est harmonique.

Démonstration

Rappel

$$\alpha(x) = \begin{cases} \exp -1/x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

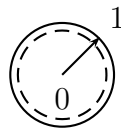


$\alpha \in C^\infty$ mais α n'est pas analytique. ($\alpha^{(0)}(0) = 0$)

Nous avons besoin des fonction de ce type ("fonction chapeau")

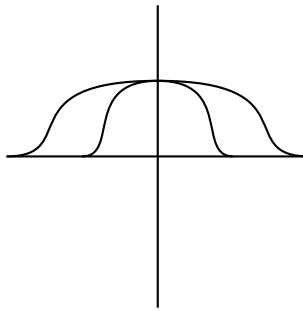
$$\begin{cases} \exp \frac{1}{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Soit $\lambda \in C^\infty(B(0, 1))$ telle que $\int_{B(0,1)} \lambda(x) dx = 1$ et $\lambda(x) = \psi(\|x\|)$ - $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mais les seuls points x où $\lambda(x) \neq 0$ sont dans $B(0, 1)$.

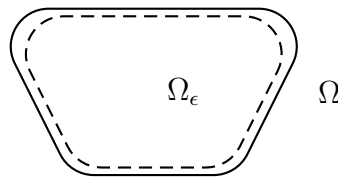


Pour $\epsilon > 0$ définissons

$$\lambda_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \lambda\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$



Soit $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \mid \overline{B(x, \epsilon)} \subset \Omega\}$.



Donc si $x \in \Omega_\epsilon$ alors la fonction $y \mapsto \lambda_\epsilon(x - y)$ a le support⁴ dans Ω .

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \varphi(y) \lambda_\epsilon(x - y) \, d^n y &= \int_{\Omega} \varphi(x - y) \lambda_\epsilon(y) \, d^n y \\
 &= \int_{\Omega} \varphi(x - y) \lambda\left(\frac{y}{\epsilon}\right) \epsilon^{-n} \, d^n y \\
 &= \int_0^1 \left(\int_{S^{n-1}} \varphi(x - r\epsilon y) \psi(r) r^{n-1} \, d\sigma(y) \right) \, dr \\
 &\stackrel{\text{hyp.}}{=} \omega_n \varphi(x) \int_0^1 \psi(r) r^{n-1} \, dr \\
 &= \omega_n \varphi(x) \int_0^1 \int_{S^{n-1}} \lambda(r y) r^{n-1} \, d\sigma(y) \, dr \\
 &= \varphi(x) \int_{B(0,1)} \lambda(y) \, d^n y = \varphi(x) \\
 \varphi(x) &= \int_{\Omega} \varphi(y) \lambda_\epsilon(x - y) \, d^n y
 \end{aligned}$$

Mais λ_ϵ est une fonction de classe C^∞ . On peut commuter $\frac{\partial}{\partial x}$ avec \int parce que cette intégrale est une intégrale standard sur un ensemble borné. Donc \int est

⁴points où elle est $\neq 0$

de classe C^∞ par rapport à x . Donc $\varphi \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$. Mais $\epsilon > 0$ est arbitraire $\Rightarrow \varphi \in C^\infty(\Omega)$.

Finalement, si $x \in \Omega_\epsilon$ la moyenne de $\varphi(x)$ sur $S(x, R)$ est indépendante de R pour $0 < R < \epsilon$. Donc, pour la substitution $z = Ry$, la première identité de Green avec $\psi \equiv 1$ nous donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dR}(\omega_n \varphi(x)) \stackrel{\text{hyp.}}{=} \frac{d}{dR} \int_{S^{n-1}} \varphi(x + Ry) d\sigma(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} y \cdot \nabla \varphi(x + Ry) d\sigma(y) \\ &= \int_{S(0,R)} \underbrace{\frac{z}{R} \cdot \nabla \varphi(x + z)}_{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} R^{1-n} d\sigma(z) \\ &= R^{1-n} \int_{S(0,R)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma(z) \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{B(0,R)} \Delta \varphi(z) d^n z \end{aligned}$$

Donc $\forall R$ telle que $\overline{B(C, R)} \subset \Omega$ on a

$$\int_{B(C,R)} \Delta \varphi = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad .$$

Car : Si $\varphi \in C^2(\Omega)$ est harmonique $\Rightarrow \varphi \in C^\infty(\Omega)$. ■

Principe du max Ω connexe ouvert. Si φ est harmonique sur Ω et $\sup\{\varphi(x) \mid x \in \Omega\} = A < +\infty$ alors

- soit $\varphi(x) < A, \forall x \in \Omega$
- ou bien $\varphi(x) = A, \forall x \in \Omega$

Démonstration $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) = A\}$ Puisque $\varphi \in C^0 \Rightarrow$ cet ensemble est fermé. Par le théorème de la moyenne si $\varphi(x) = A$ alors $\varphi(y) = A$ pour y dans une boule centré en x , car sinon les valeurs moyennes sur la sphère seront $< A$ (i.e. $\neq A$). Donc cet ensemble contient une boule. Donc cet ensemble est ouvert. (Contradiction!) \Rightarrow cet ensemble est soit \emptyset soit Ω par connectivité de Ω . ■

Corollaire Si $\overline{\Omega}$ est compact, φ harmonique sur Ω et C^0 sur $\overline{\Omega}$. Alors le valeur maximale de φ sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur $\partial\Omega$.

Démonstration Le max. est atteint quelque part si c'est un point intérieur alors $\varphi = \text{const}$ sur la composante connexe qui contient ce point. (Par le principe du max.) Donc φ rest constante jusqu'au bord. Donc il existe un autre point sur le bord $\partial\Omega$ où le max est atteint. ■

Théorème d'unicité pour le problème de Dirichlet

Trouver φ telle que $\Delta\varphi = 0$ sur un ouvert Ω , $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$ et $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$ donné.

$\overline{\Omega}$ compact. Si φ_1, φ_2 sont harmoniques sur Ω , C^0 sur $\overline{\Omega}$ et $\varphi_1|_{\partial\Omega} = \varphi_2|_{\partial\Omega} \Rightarrow \varphi_1 \equiv \varphi_2$

Démonstration $\Delta\varphi_1 = 0 = \Delta\varphi_2 \Rightarrow \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max(\varphi_1 - \varphi_2) \text{ est sur } \partial\Omega \\ \min(\varphi_1 - \varphi_2) \text{ est sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Mais sur $\partial\Omega$

$$(\varphi_1 - \varphi_2)|_{\partial\Omega} = 0 \rightarrow \varphi_1 \equiv \varphi_2 \quad .$$

■

Théorème de Liouville

φ bornée et harmonique sur $\mathbb{R}^n \Rightarrow \varphi = \text{const}$.

Démonstration $x \in \mathbb{R}^n, R > \|x\|$, on applique le thm. de la moyenne pour les boules.

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = \frac{n}{R^n \omega_n} \left| \int_{B(x,r)} \varphi(y) d^n y - \int_{B(0,R)} \varphi(y) d^n y \right| \leq \frac{n}{R^n} \omega_n \int_D |\varphi(y)| d^n y \leq \frac{nM}{R^n \omega_n} \int_D d^n y$$

où $M > |\varphi(x)|, \forall x \in \mathbb{R}^n$ (par hypothèse).

D est contenu dans l'ensemble $R - \|x\| < \|y\| < R + \|x\|$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| &\leq \frac{nM}{R^n \omega_n} \int_{R - \|x\| < \|y\| < R + \|x\|} d^n y \\
&= \frac{nM}{R^n} \int_{R - \|x\|}^{R + \|x\|} r^{n-1} dr \\
&= M \frac{(R + \|x\|)^n - (R - \|x\|)^n}{R^n} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \\
\Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| &= 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(0)
\end{aligned}$$

■

3.5 Coordonnées curvilignes orthogonales

Tout est dans \mathbb{R}^3 .

Soit \mathcal{E} avec coordonnées (ξ, η, ζ) .

Soit E avec coordonnées (x, y, z) .

$A, B, C, \mathcal{E}, \mathcal{E}$ ouverts $F : A \rightarrow B$ bijective classe C^1 . Avec inverse de classe C^1 .

On a

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \\
&\begin{cases} \xi = \xi(x, y, z) \\ \eta = \eta(x, y, z) \\ \zeta = \zeta(x, y, z) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} x(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)) = x \\ y(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)) = y \\ z(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)) = z \end{cases} \\
&(x, y, z) \in B, (\xi, \eta, \zeta) \in A
\end{aligned}$$

Définition $P(x_0, y_0, z_0) \in B$ donné, (x_0, y_0, z_0) sont les coordonnées données par

$$\xi_0 = \xi(x_0, y_0, z_0), \eta_0 = \eta(x_0, y_0, z_0), \zeta_0 = \zeta(x_0, y_0, z_0).$$

Alors (ξ_0, η_0, ζ_0) sont les coordonnées curvilignes du même point $P \in B$.

ξ_0 est l'espace des paramètres.

E est l'espace géométrique.

F définit le système de coordonnées curvilignes.

On pose $\vec{r}(\xi, \eta, \zeta) = x(\xi, \eta, \zeta)i + y(\xi, \eta, \zeta)j + z(\xi, \eta, \zeta)k$

$\xi \mapsto \vec{r}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ courbe de coordonnées.

$(\eta, \zeta) \mapsto \vec{r}(\xi_0, \eta, \zeta)$ courbe de coordonnées.

Idem pour les autres.

On pose

$$h_\xi := \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right\|, h_\eta := \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right\|, h_\zeta := \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \right\|$$

$$\vec{e}_\xi = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}, \vec{e}_\eta = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}, \vec{e}_\zeta = \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta}$$

$(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ repère naturel.

Leçon du
2007-01-15

Définition Le système des coordonnées curvilignes est dit **orthogonal** si en chaque point les vecteurs $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ sont orthogonaux et d'orientation directe :

$$\vec{e}_\xi \times \vec{e}_\eta = \vec{e}_\zeta$$

$$\varphi(x, y, z), \vec{u}(x, y, z) = u_x i + u_y j + u_z k$$

On peut former

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, \zeta) &:= \varphi(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \\ \vec{v}(\xi, \eta, \zeta) &:= \vec{u}(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \\ &= U_1(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \\ &\quad + U_2(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \\ &\quad + U_3(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \end{aligned}$$

Attention : $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ dépendent de (ξ, η, ζ) .

Puisque le système est orthogonal les composantes de \vec{U} sont données par

$$\begin{cases} U_\xi &= \vec{u}(\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)) \cdot \vec{e}_\xi \\ U_\eta &= \vec{u}(\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)) \cdot \vec{e}_\eta \\ U_\zeta &= \vec{u}(\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)) \cdot \vec{e}_\zeta \end{cases} \quad (3.14)$$

Soit $\vec{u}(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z)$

$$\Rightarrow \vec{U}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{u}(\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)) = \nabla\varphi(\vec{r}(\xi, \eta, \zeta))$$

On veut exprimer $\nabla\varphi(x, y, z)$ en termes de (ξ, η, ζ) et de Φ .

$$\nabla\varphi(x, y, z) = \text{''}\nabla\text{''}\Phi(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\text{grad } \varphi = (\text{grad } \varphi)_\xi \vec{e}_\xi + (\text{grad } \varphi)_\eta \vec{e}_\eta + (\text{grad } \varphi)_\zeta \vec{e}_\zeta$$

mais selon (3.14)

$$\begin{aligned} (\text{grad } \Phi)_\xi &= (\text{grad } \varphi)_\xi = \nabla\varphi(\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)) \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) (\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)) \cdot \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} \\ &= \frac{1}{h_\xi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial\xi} \right) \\ &= \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \end{aligned}$$

$$\nabla\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \vec{e}_\xi + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \vec{e}_\eta + \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \vec{e}_\zeta$$

Commentaire: ??
donné par ?

Élément de surface Pour (ξ, η) est donné par $d\sigma_{(\xi, \eta)}(\xi, \eta, \zeta)$ est l'aire du parallélogramme déterminé par $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} d\xi$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} d\eta$

$$\begin{aligned} d\sigma_{(\xi, \eta)} &= \left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} d\xi \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} d\eta \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \right\| d\xi d\eta \\ &= \sqrt{\left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} \right\|^2 \left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \right\|^2 - \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \right)^2} \\ &= h_\xi h_\eta d\xi d\eta \end{aligned}$$

Elément d'arc ds

$$\begin{aligned}
 ds &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 \\
 &\quad \dots + \dots + \dots \\
 &\quad \dots + \dots + \dots \\
 &= \dots \\
 &= h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 + h_\zeta^2 d\zeta^2
 \end{aligned}$$

El. de volume $dV = h_\xi h_\eta h_\zeta d\xi d\eta d\zeta$

Leçon du
2007-01-16
Commentaire:
Ordre des
formules ???

Laplacien

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]$$

Rot

$$\text{rot } \vec{U} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \begin{vmatrix} h_\xi \vec{e}_\xi & h_\eta \vec{e}_\eta & h_\zeta \vec{e}_\zeta \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ h_\xi U_\xi & h_\eta U_\eta & h_\zeta U_\zeta \end{vmatrix}$$

Divergence

Démonstration

a) Directement

Soit G la fonction inverse de F

$$\frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = I$$

$\text{grad } G_1$ est la première ligne de $\frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(x, y, z)}$.

$\Rightarrow \text{grad } G_1 \perp$ aux 2 dernières colonnes du $\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$.

$$\Rightarrow \text{grad } G_1 = C \left(\begin{array}{c} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \zeta} \end{array} \right) \Bigg\} \vec{e}_\xi$$

Mais $\text{grad } G_1$ fois la première colonne = 1

$$\Rightarrow C \underbrace{\left(\frac{\partial F_1^2}{\partial \xi} + \frac{\partial F_2^2}{\partial \eta} + \frac{\partial F_3^2}{\partial \zeta} \right)}_{Ch_\xi^2 \Rightarrow C=1/h_\xi} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{grad } G_1 &= \frac{1}{h_\xi} \vec{e}_\xi & \Rightarrow \text{rot} \left(\frac{1}{h_\xi} \vec{e}_\xi \right) &= 0 \\ \Rightarrow \text{grad } G_2 &= \frac{1}{h_\eta} \vec{e}_\eta & \Rightarrow \text{rot} \left(\frac{1}{h_\eta} \vec{e}_\eta \right) &= 0 \\ \Rightarrow \text{grad } G_3 &= \frac{1}{h_\zeta} \vec{e}_\zeta & \Rightarrow \text{rot} \left(\frac{1}{h_\zeta} \vec{e}_\zeta \right) &= 0 \end{aligned}$$

On a

$$\text{div} \left(\frac{1}{h_\eta h_\zeta} \right) \vec{e}_\xi = 0, \quad \text{div} \left(\frac{1}{h_\zeta h_\eta} \right) \vec{e}_\zeta = 0, \quad \text{div} \left(\frac{1}{h_\xi h_\zeta} \right) \vec{e}_\eta = 0$$

En effet :

$$\begin{aligned} \text{grad } G_1 \times \text{grad } G_2 &= \frac{1}{h_\xi h_\eta} h_\eta \vec{e}_\eta \times \vec{e}_\eta = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \vec{e}_\xi \\ &\Rightarrow \text{div} \left(\frac{1}{h_\xi h_\eta} \right) \vec{e}_\zeta \end{aligned}$$

$$= \text{div} (\text{grad } G_1 \times \text{grad } G_2) = \text{rot} (\text{grad } G_1) \cdot \text{grad } G_2 - \text{rot} (\text{grad } G_2) \cdot \text{grad } G_1 = 0$$

...

$$\text{div } \vec{U} = \dots = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\zeta U_\xi) + \dots \right]$$

b) Deuxième méthode.

La divergence est un opérateur intrinsèque.

Rappel :

$$\text{div } \vec{u}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Volume } B(P, \rho)} \iint_{\partial B(P, \rho)} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, d\sigma$$

On va utiliser cette formule pour un cube avec axes (ξ, η, ζ) à $R(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ de longueur $\Delta\xi$.

Sur $S_{(\xi, \eta)}$ on a

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right\|} = \vec{u} \cdot \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right\|} = \vec{u} \cdot \vec{e}_\zeta = \vec{U}_\zeta$$

$$\vec{U}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{u}(\vec{r}(\xi, \eta, \zeta))$$

Donc le flux transversal à $S_{(\xi,\eta)}$ et $S_{(\xi,\eta)}^+$ est

$$\begin{aligned} & \iint_{S_{(\xi,\eta)}^+} U_\xi \, d\sigma_{(\xi,\eta)} - \iint_{S_{(\xi,\eta)}} U_\xi \, d\sigma_{(\xi,\eta)} \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} \int_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\eta} \left[U_\xi h_\xi h_\eta \Big|_{(\xi,\eta,\zeta_0+\Delta\zeta)} - U_\xi h_\xi h_\eta \Big|_{(\xi,\eta,\zeta_0)} \right] d\xi \, d\eta \end{aligned}$$

Thm. de la moyenne :

$$= \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} \int_{\eta_0}^{\eta_0+\Delta\eta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi h_\eta U_\zeta) \Big|_{(\xi,\eta,\zeta')} d\xi \, d\eta$$

où on pose

$$\zeta' \in]\zeta_0, \zeta_0 + \Delta\zeta[$$

Thm. de la moyenne pour les int. :

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi h_\eta U_\zeta) \Big|_{(\xi',\eta',\zeta')} \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta$$

où on pose

$$\xi' \in]\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi[$$

et

$$\eta' \in]\eta_0, \eta_0 + \Delta\eta[$$

Pour le flux à travers le cube on a :

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial(\text{Boite})} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\sigma \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\zeta U_\xi) \Big|_{(\xi_0^{(1)}, \eta_0^{(1)}, \zeta_0^{(1)})} + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\zeta U_\eta) \Big|_{(\xi_0^{(2)}, \eta_0^{(2)}, \zeta_0^{(2)})} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi h_\eta U_\zeta) \Big|_{(\xi_0^{(3)}, \eta_0^{(3)}, \zeta_0^{(3)})} \right] \end{aligned}$$

Le volume de la boîte est $h_\xi h_\eta h_\zeta \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta$.

On divise et on laisse $\Delta\xi \rightarrow 0, \Delta\eta \rightarrow 0, \Delta\zeta \rightarrow 0$. On trouve

$$\text{div } \vec{U} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\zeta U_\xi) + \dots \right]$$

Rotationnel

a) Directe :

On se rappelle que $\text{rot} \left(\frac{1}{h_\xi} \right) \vec{e}_\xi = 0 \dots$ (cf (3.5)).

$$\begin{aligned}
 \vec{U} &= U_\xi \vec{e}_\xi + U_\eta \vec{e}_\eta + U_\zeta \vec{e}_\zeta \\
 &= (h_\xi U_\xi) \left(\frac{1}{h_\xi} \vec{e}_\xi \right) + \dots \\
 \text{rot } \vec{u} &= \text{rot} \left[(h_\zeta U_\zeta) \left(\frac{1}{h_{x^i}} \vec{e}_\xi \right) + \dots \right] \\
 &= (h_\xi U_\xi) \underbrace{\text{rot} \left(\frac{1}{h_{x^i}} \vec{e}_\xi \right)}_{\rightarrow 0} + \text{grad} (h_\zeta U_\zeta) \times \frac{1}{h_\zeta} \vec{e}_\xi + \dots \\
 &= \text{grad} (h_\zeta U_\zeta) \times \frac{1}{h_\xi} \vec{e}_\xi + \dots \\
 (\text{rot } \vec{U})_\xi &= (\text{rot } \vec{u}) \cdot \vec{e}_\xi \\
 &= \left(\text{grad} (h_\eta U_\eta) \times \frac{1}{h_\eta} \vec{e}_\eta \right) \cdot \vec{e}_\xi + \left(\text{grad} (h_\zeta U_\zeta) \times \frac{1}{h_\zeta} \vec{e}_\zeta \right) \cdot \vec{e}_\xi \\
 &= \frac{1}{h_\eta} (\text{grad} (h_\zeta U_\zeta))_\zeta (\vec{e}_\zeta \times \vec{e}_\eta) \cdot \vec{e}_\xi + \frac{1}{h_\zeta} (\text{grad} (h_\zeta U_\zeta))_\eta (\vec{e}_\eta \times \vec{e}_\zeta) \cdot \vec{e}_\xi \\
 &\stackrel{\text{formule du grad}}{=} -\frac{1}{h_\eta h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\eta U_\eta) + \frac{1}{h_\zeta h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\zeta U_\zeta) \\
 &= \frac{h_\xi}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_\zeta U_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\eta U_\eta) \right]
 \end{aligned}$$

Commentaire:
 Todo : A
 revoir!!!

b) Intrensece⁵ :

$$(\text{rot } \vec{u}) \cdot \vec{n} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Aire}(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, d\sigma$$

⁵intrensece = existe indépendamment de la base

Deuxième partie
Analyse Complexe

4

Analyse complexe

Boum, boum, boum — le tambour.
Prof. Tudor RATIU, Mathématicien, 2006

C'est pas un piquenique !
Prof. Tudor RATIU, Mathématicien, 2007

4.1 Introduction

Leçon du
2007-01-16

Définition Le corps des nombres complexes \mathbb{C} est l'ensemble \mathbb{R}^2 avec

– L'addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

– La multiplication avec scalaires $a \in \mathbb{R}$

$$a(x, y) = (ax, ay)$$

(\mathbb{R}^2 est un espace vectoriel de dimension 2.)

– La multiplication

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

On vérifie que la multiplication est associative et commutative avec l'élément neutre $(1, 0)$ et

$$(x, y) \neq 0 \Rightarrow \exists (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Exemple $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0) = -(1, 0)$

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto (x, 0) \text{ lin. inj.}$$

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$1 = (1, 0), \quad i = (0, 1)$$

$$i^2 = -1$$

$$\begin{aligned} (x + iy)(x' + iy') &= x'x + iyx' + ix'y' + i^2yy' \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \end{aligned}$$

(Ceci n'est pas possible en dimension 3 et en dimension 4 (les quaternions) on perd la commutativité)

$$\begin{aligned} (x, y) \leq (x', y') &\Leftrightarrow x \leq x', \text{ soit si } x = x', y \leq y' \\ (0, 1) &\geq (0, 0) \\ (0, 1)^2 &= (-1, 0) \leq (0, 0) \end{aligned}$$

Commentaire: à expliquer

Opérations

$$z = x + iy, \quad \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z \neq 0$$

Définition Pour $z = x + iy$ on définit

$$\begin{aligned}\bar{z} &:= x - iy \\ |z| &:= \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x &= |z| \cos \theta \\ y &= |z| \sin \theta \\ \theta &= \arg z \quad (\text{hors } 2\pi)\end{aligned}$$

Propriété Toute nombre complexe a une racine carrée.

Démonstration $z = a + ib$

$$w = x + iy$$

On doit résoudre $w^2 = z$

$$(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}), \quad y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad (:= \alpha \text{ avec } +)$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad (:= \beta \text{ avec } -)$$

Quel est le choix des signes ? $2xy = b$ est une des équations, donc

– si $b > 0$ le choix est $x = \alpha, y = \beta$ ou $x = -\alpha, y = -\beta$

– si $b < 0$ le choix est $x = \alpha, y = -\beta$ ou $x = -\alpha, y = \beta$.

Donc on peut écrire

$$w = \pm(\alpha + \mu\beta i) \quad \text{où } \mu = 1 \text{ si } b \geq 0, \mu = -1 \text{ si } b < 0$$



Conclusions

- Il y a deux racines carrées.
- La racine carrée de z est réelle $\Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow b = 0, a = \sqrt{a^2} \Leftrightarrow b = 0, a \geq 0 \Leftrightarrow z$ est réel positif.
- La racine carrée de z est imaginaire (pure) $\Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow -a = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow b = 0, -a = \sqrt{a^2} \Leftrightarrow b = 0, a \leq 0 \Leftrightarrow z$ est réel et négatif.
- Les deux racines sont égales $\Leftrightarrow \alpha = -\alpha, \beta = -\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta = z = 0$.

Forme polaire $z = (\rho, \theta); \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$
 $a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$\theta = \arg z$ est déterminé à un multiple de 2π près.

$$\arg z = \{0 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Une spécification de θ s'appelle une **branche d'argument**.

$$z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, 2$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Par induction

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

on trouve la Formule de MOIVRE. La même formule est valable pour $n < 0$.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} 2\pi \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Exemple Soit $z \neq 0$.

$$\psi_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2)$$

$$\psi_z(w) = zw$$

Application \mathbb{R} -linéaire. La Matrice ψ_z est

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{si } z = a + ib \quad .$$

Si $w = x + iy$

$$\psi_z = zw = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay) = \begin{pmatrix} ax & -by \\ ay & bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Propriétés élémentaires

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
- $\overline{\frac{z'}{z}} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$
- $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ si $z = a + ib$
- $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $|zz'| = |z||z'|$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $|zz'| = |z||z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad z' \neq 0$
- $|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$
- $|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$
- $|z_1 w_1 + \dots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} \sqrt{|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2}$

4.2 Fonctions élémentaires

4.2.1 Polynôme

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

4.2.2 Inversion

Propriété $f(z) = \frac{1}{z}$

Elle transforme droites et cercles en droites et cercles.

Démonstration $Ax + By + C(x^2 + y^2) = D$ tous les cercles et tous les droites, pour $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + (-2x_0)x + (-2y_0)y = R^2 - x_0^2 - y_0^2$$

Si $z = x + iy, f(z) = 1/z$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} =: u + iv; \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z^2 + v^2 = \left| \frac{1}{z} \right|^2 = \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right|^2 = \frac{|z|^2}{|z|^4} = \frac{1}{|z|^2}$$

$$D = Ax + By + C(x^2 + y^2)$$

$$\frac{D}{x^2 + y^2} = A \frac{x}{x^2 + y^2} + B \frac{y}{x^2 + y^2} + C$$

$$D(u^2 + v^2) = Au - Bv + C$$

$$D(u^2 + v^2) - Au + Bv = C$$

- Le cercle ou la droite passe par 0 $\Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow$ elle est tracé en droite.
- Si on a une droite $\Leftrightarrow C = 0$. Donc l'image est une droite ou un cercle qui passe par 0.

■

4.2.3 Homographie (transformation de Möbius)

Remarque T est un opérateur, $Tz = T(z)$.

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{définie sur } \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$$

– Si $c = 0$, Tz est une translation plus similitude.

$$Tz = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

– $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$

où $T_1z = z + \frac{d}{c}$ (Translation)

$T_2z = \frac{1}{d}$ (Inversion)

$T_3z = \frac{bc-cd}{c^2}z$ (Similitude)

$$T_4z = z + \frac{a}{c}.$$

Si $ad = bc \Rightarrow T_3 = 0 \Rightarrow Tz = \frac{a}{c}$.

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{acz + bc}{c(z + d)} = \frac{a(z + ad)}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c}$$

Donc on va supposer que $ad \neq bc$.

Conclusion : toute homographie transforme les droites et les cercles en droites et cercles.

Comment trouve-t-on l'image ?

1. Si la droite ou le cercle passent par le point $-\frac{d}{c}$ alors $T(-\frac{d}{c}) = \infty$. Ainsi l'image de la droite ou du cercle est une droite. IL suffit de prendre 2 points sur la droite ou le cercle et calculer leur image.
2. Si la droite ou le cercle ne passent pas par $-\frac{d}{c}$ alors leur image par T est une droite ou un cercle. Trois points sur la droite ou le cercle déterminent l'image.
3. L'image d'une droite est une droite ou un cercle qui passe par le point $\frac{a}{c}$.

T est bijective.

$$T : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$$

$$T^{-1}w = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

- L'identité est une homographie : $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$.
- Une composition de deux homographies est aussi une homographie.
- **Conclusion** : Les transformation de MÖBIUS forment un groupe.

Théorème Toute transformation conforme du disque unité

$$D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

est de la forme

$$Tz = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$$

pour un $z_0 \in D(0, 1)$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Conforme veut dire une fonction qui préserve les angles. Pour le moment on pense transformation de MÖBIUS.

On a

$$a = e^{i\theta}, \quad b = -z_0 e^{i\theta}, \quad c = -z_0, \quad d = 1 \quad .$$

4.2.4 Fonction exponentielle

Si $z = x + iy$

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y)$$

Propriétés : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \Rightarrow e^z$ n'est jamais zéro.

Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x > 0$ pour $x > 0$, $x < e^x < 1$ pour $x < 0$.

$$|e^{x+iy}| = e^x$$

$e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$ e^z est périodique de période $2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$z = |z| e^{i \arg z}.$$

Définition

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

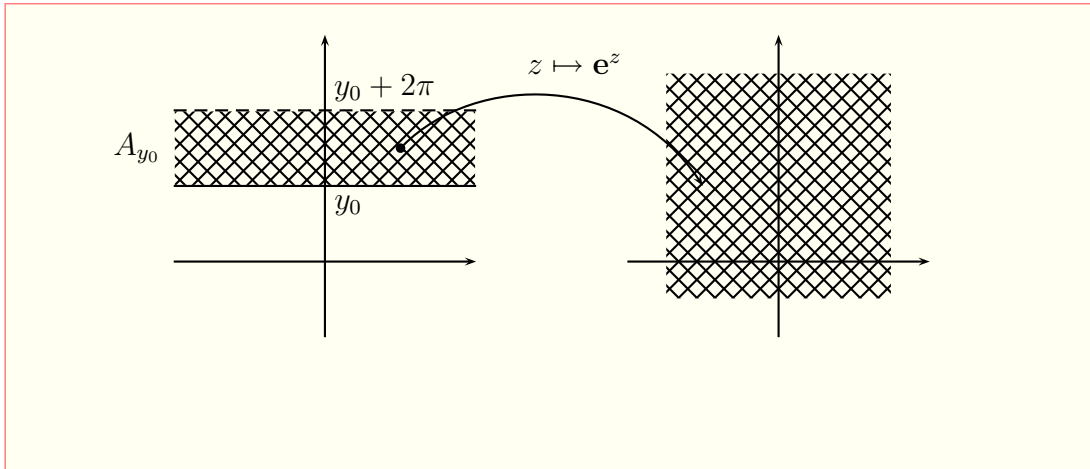
$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

Propriétés $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

Propriété Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, $A_{y_0} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$. Alors $z \mapsto e^z$ est bijective entre A_{y_0} et $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.



Démonstration

Injectivité : $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2\pi ik$. Mais $z_1, z_2 \in A_{y_0} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow z_1 - z_2 = 0$.

Surjectivité : Soit $w \neq 0$ On va voir que $\exists z \in A_{y_0}$ t.q. $e^z = w$
Soit $z = x + iy$. Donc

$$w = e^z = e^x e^{iy} \Leftrightarrow |w| = e^x, e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

$$e^x = |w| \Leftrightarrow x = \log |w|$$

La deuxième équation a une infinité de solutions y , toutes deux différentes par un multiple de 2π . Donc il y a exactement une seule solution y dans l'intervalle $[y_0, y_0 + 2\pi[$. On prends pour y l'argument de w . ■

4.2.5 Fonction logarithme

Définition La fonction $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ avec l'image $y_0 \leq \text{Im}(\log z) < y_0 + 2\pi$ est définie par

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

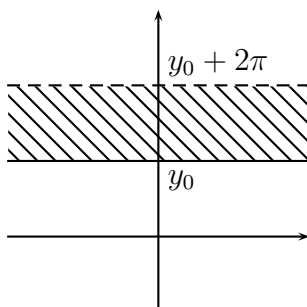
ou $\arg z \in [y_0, y_0 + 2\pi[$ et $\log |z|$ est le logarithme réel du nombre $|z| > 0$.

On dit que c'est la **branche de la fonction** logarithmique dans $\{x + iy \mid y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$.

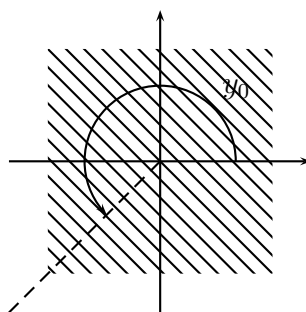
Attention $\log z$ est défini seulement si on spécifie la branche.

Exemple Int. est $[0, 2\pi[$.
Alors $\log(1 + i) = \log \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}$.

Exemple Int. est $[0, 3\pi[$.
Alors $\log(1 + i) = \log \sqrt{2} + i \frac{9\pi}{4}$.



$y = \text{const}$ est envoyé en $e^x e^{iy} = e^z$.



Choix d'une détermination. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et soit d la flèche d'origine 0 et angle φ_0 avec l'axe réelle positive.

Soit $D := \mathbb{C} \setminus d$ et si $z \in D$, soit $\arg_{\varphi_0} z$ l'argument de z strictement compris entre φ_0 et $\varphi_0 + 2\pi$.

Alors la **détermination du logarithme** complexe sur D est

$$\log z = \log |z| + i \arg_{\varphi_0} z, \quad \forall z \in D$$

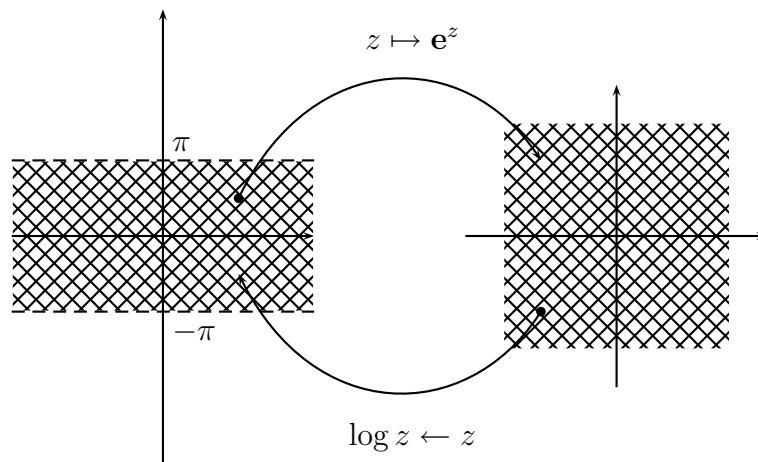
Cette détermination dépend de φ_0 . Si on change φ_0 on change le log. Mais on a toujours :

$$e^{\log z} = e^{\log|z| + i \arg_{\varphi_0} z} = e^{\log|z|} e^{i \arg_{\varphi_0} z} = |z| e^{i \arg_{\varphi_0} z} = z .$$

$$e^{\log z} = z$$

pour n'importe quel choix de φ_0 .

Détermination principale $\varphi_0 = -\pi$



On écrit parfois

$$\text{Log} z = \log z = \log |z| + i \arg_{-\pi} z$$

Attention $\log e^z \neq z$ en général.

Exemple $z = 2\pi i \Rightarrow e^z = 1 \Rightarrow \log e^z = \log 1 = 0$
 $z = 2\pi i \neq 0$

Mais si on fait le choix d'une branche, par exemple la détermination principale, il est vrai que $\text{Log} e^z = z$.

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi}$$

Exemple $\log(-1-i)(1-i)$ détermination principale.

$$\log(-1-i)(1-i) = \log[-(1+i)(1-i)] = \log(-2) = \log 2 + i\pi$$

$$\log(-1-i) = \log \sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}$$

$$\log(1-i) = \log \sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4}$$

$$\log \sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4} + \log \sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4} = \log 2 + i3\pi = (\log 2 + i\pi) + i2\pi$$

4.2.6 Fonction puissance

Définition $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Alors

$$a^b = e^{b \log a}$$

Ici on sous-entend qu'on a choisi une branche du log complexe c'est-à-dire $[y_0, y_0 + 1\pi[$ ou la fonction arg prends ses valeurs. Si $b = \frac{1}{q}, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^{\frac{1}{q}}$ a q valeurs. En changeant la branche on trouve des valeurs pour $e^{b \log a}$ qui diffèrent par des facteurs $e^{2\pi kb}$.

Propriété $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Alors a^b a une seule valeur (C'est-à-dire a^b ne dépend pas du choix de la branche du log.) $\Leftrightarrow b \in \mathbb{Z}$. Si $b \in \mathbb{Q}, b = \frac{p}{q}, (p, q) = \text{pgcd}(p, q) = 1$ alors a^b a exactement q valeurs; ils sont les q racines de a^b . Si $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou si $\text{Im } b \neq 0$ alors a^b a une infinité des valeurs. Quand a^b a valeurs différentes elles diffèrent par des facteurs de la forme $e^{2\pi kbi}, k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration Prenons la détermination principale du log. $[0, 2\pi[$. Si nous changeons la branche on obtiendra

$$\log a + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$$

donc

$$a^b = e^{b \log a} = e^{b \log |a| + 2k\pi bi} = e^{b \log |a|} e^{2\pi kbi}, k \in \mathbb{Z}$$

Mais $e^{2\pi kbi}$ n'est pas changé si on bouge la branche $\Leftrightarrow b \in \mathbb{Z}$.

Si $b = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) = 1$, $e^{2\pi ik\frac{p}{q}}$ a q valeurs.

Si $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et si $e^{2\pi kbi} = e^{2\pi lbi} \Leftrightarrow e^{2\pi(k-l)bi} = 1 \Leftrightarrow b(k-l) \in \mathbb{Z}$ qui est impossible (car b irrationnel). Donc il y a une infinité des valeurs distinctes. Finalement si $\text{Im } b \neq 0, b = x + iy, y \neq 0 \Rightarrow e^{2\pi ikb} = e^{2\pi k(x+iy)} = e^{2\pi k(x-y)} = e^{-2\pi ky} e^{2\pi kix} \Rightarrow \infty$ des val. distinctes. ■

Exemple $a = 1 + i, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Alors les valeurs de a^b (en nombre infini) sont

$$(1+i)^b = e^{b \log(1+i)} = e^{b(\log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2\pi ik)} = e^{b \log \sqrt{2} + ib\frac{\pi}{4}} e^{2\pi kbi}$$

Propriété

1. $b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a^b| = |a|^b$. Mais $|a^b| \neq |a|^{|b|}$ en général.
2. $a, b, c \in \mathbb{C} \Rightarrow a^b a^c = a^{b+c}$ en utilisant une branche du log.
3. $(ab)^c = a^c b^c$ si on choisit une branche du log tel que $\log(ab) = \log a + \log b$.

4.2.7 Fonction racines

$$b = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{(\log z)\frac{1}{n}}$$

avec un choix de brancne

$$(\sqrt[n]{z})^n = z$$

Démonstration Faisons un choix de branche du log.

$$z = r e^{i\theta} \Rightarrow \log z = \log r + i\theta$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{n} \log z} = e^{\frac{1}{n}(\log r + i\theta)} = e^{\frac{1}{n} \log r} e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

$$\Rightarrow (\sqrt[n]{z})^n = (\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}})^n = r e^{i\theta} = z$$

■

Si on fait le choix de la dét. principale du log donc l'intervalle $] - \pi, \pi[$ on écrit

$$\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} \text{Log}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \quad \text{où } \mathbb{R}^- =] - \infty, 0[$$

Attention $\sqrt[n]{z^n} \neq z$ en général.

Exemple $z = i, n = 3$

$$z^3 = -i \Rightarrow \sqrt[3]{z^3} = \sqrt[3]{-i} = e^{\frac{1}{3} \text{Log}(-i)} = e^{\frac{1}{3}(\log 1 - i\frac{\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \neq i$$

4.2.8 Fonctions hyperboliques

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

Réel

$$\cosh(iz) = \cos(z)$$

$$\cosh(z) = \cos(iz)$$

$$\sinh(iz) = i \sin(z)$$

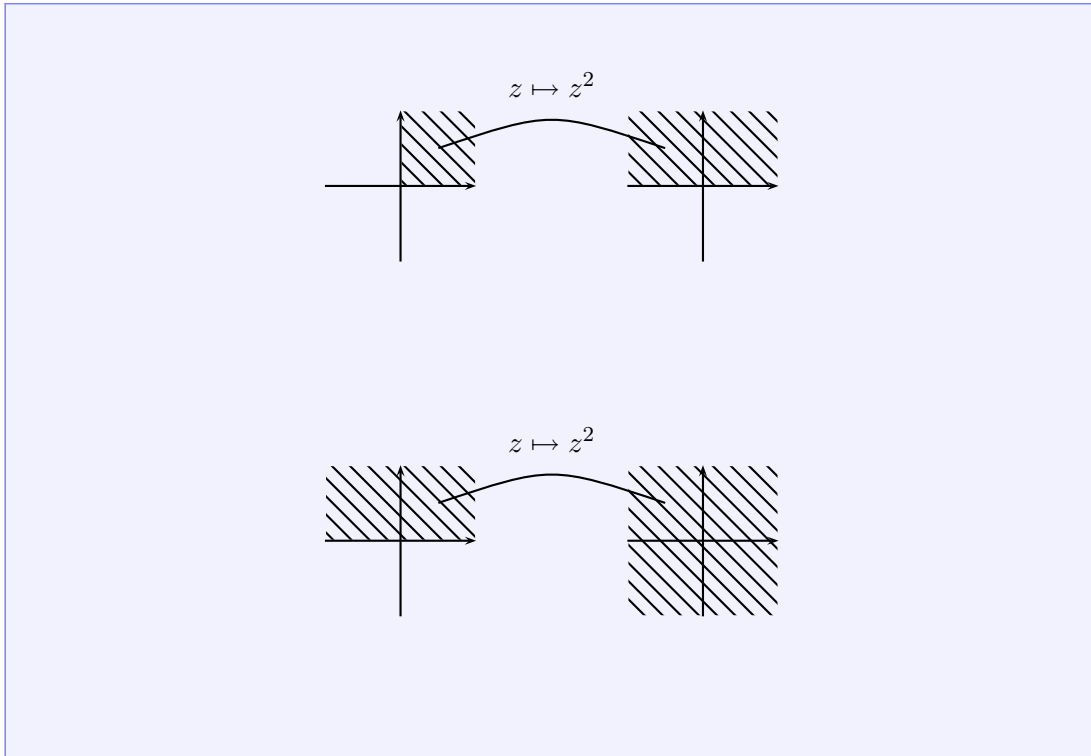
$$\sinh(z) = i \sin(iz)$$

4.2.9 Intérprétation géom. des applications

Exemple $z \mapsto z^2$

Longueur de $z^2 = |z^2| = |z|^2$.

Argument de $z^2 = 2 \arg z$.



Définition $D \subset \mathbb{C}$ ouvert.

$f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est continue au point $z_0 \in D$ si pour toutes les suites $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ on a $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z_0)$.

f continue sur D si f cont. dans chaque point $z_0 \in D$.

Propriété f cont : Les mêmes propriétés sont valables :

- def. avec ϵ et δ .
- image d'un ensemble connexe est connexe.
- image d'un compact est compact
- continuité uniforme : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tq. si $|z_1 - z_2| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$.
- Toute fonction continue sur un compact est unif. cont.

4.2.10 La sphère de Riemann

Formellement on définit $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec les règles de calcul suivantes

- $z + \infty = \infty$

- $z \cdot \infty = \infty$ si $z \neq 0$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{z}{\infty} = 0$

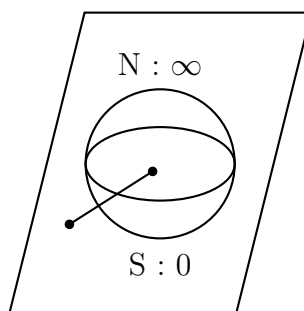
Les formes non-définies :

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, 1^\infty$$

La notion de la limite reste la même

1. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = z_0$ si $|z| \geq R \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$: $\forall R > 0, \exists \delta(R) > 0$ t.q. si $|z - z_0| < \delta(r)$ on a $|f(z)| > R$.
3. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$: $\forall R > 0, \exists N > 0$ t.q. si $|z| > N \Rightarrow |f(z)| > R$

Réalisation du plan complexe dans $\overline{\mathbb{C}}$



$\overline{\mathbb{C}}$ est une sphère, projection stéréographique.

4.3 Fonctions différentiables

Définition $D \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in D$.

f est **différentiable** ou **dérivable** au point z_0 si $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Cette limite s'appelle la dérivée de f au point z_0

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0)$$

4.3.1 Applications conformes

Intuitivement : Si $f'(z_0) \neq 0$ alors "infinitésimalement" f est une rotation d'angle $\arg f'(z_0)$ et une dilatation de facteur $|f'(z_0)|$. Si $f'(z_0) = 0$ la structure est beaucoup plus compliquée.

Définition $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. D ouvert, est **conforme** au point $z_0 \in D$, si $\exists \theta \in [0, 2\pi[$, $\exists r > 0$ telles que pour chaque courbe $r(t) \in D$, $r(0) = z_0$, $r'(0) \neq 0$ la courbe $f(r(t)) =: \sigma(t)$ est différentiable en $t = 0$ et

$$\begin{aligned} |\sigma'(0)| &= r |r'(0)| \\ \arg \sigma'(0) &= \arg r'(0) + \theta \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Donc une application conforme fait une rotation et une dilatation des vecteurs tangents à une courbe. C'est le contenu du rot ??? "infinitésimale".

Ici il manque un image

Donc l'angle entre deux arcs lisses Γ_1, Γ_2 qui passent par z_0 est égal *en sens et grandeur* à l'angle entre les deux arcs $f_0\Gamma_1$ et $f_0\Gamma_2$ qui passent par $f(z_0)$.

Commentaire:
arg $f_0 \dots$
correcte??

Théorème Soit $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable, D ouvert. Si $f'(z_0) \neq 0$ alors f est conforme au point z_0 . Avec $\theta = \arg f'(z_0)$, $r = |f'(z_0)|$.

Démonstration

$$\begin{aligned} \sigma(t) &:= f(r(t)) \\ \Rightarrow \sigma'(t) &= f'(r(t))r'(t) = f'(z_0)r'(0) \\ \Rightarrow |\sigma'(t)| &= |f'(z_0)| |r'(0)| \\ \arg \sigma'(t) &= \arg f'(z_0) + \arg r'(0) \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

■

Exemple Les homographies sont applications conformes

$$\begin{aligned} Tz &= \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0 \\ T'z &= \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} \\ &= \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \end{aligned}$$

4.3.2 Les équation de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (u(x, y), v(x, y)) \\ z &= x + iy \\ f(z) &= u(z) + iv(z) \end{aligned}$$

Rappel f est différentiable (comme fonction réelle) au point $z_0 = (x_0, y_0)$ si $\exists T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ application linéaire telle que : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ t.q. si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f(x, y) - f(x_0, y_0) - T((x, y) - (x_0, y_0))\| < \epsilon \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$.

On sait que si T existe, T est unique. T ne dépend pas du choix de normes. Si T existe, dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , $e_1 = (1, 0)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$, on a :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0)$$

la **Matrice Jacobienne**.

Si T existe on écrit $Df(x_0, y_0) = T$. Parfois on écrit aussi

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) \quad .$$

Rappel $f \in C^1 \Leftrightarrow \exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ et sont tous C^0 .

Question L'existence de la dérivée complexe est différente de la condition que f (étant que fonction réelle) est diff?

Réponse Oui!

Lemme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ représente la multiplication par un nombre complexe $\Leftrightarrow a = d, b = -c$.

Le nombre complexe en question est $a + ic = d - ib$.

Démonstration Regardons la multiplication avec $a + ic$

$$(a + ic)(x + iy) = (ax - cy)i + (cx + ay) = \begin{pmatrix} ax & -cy \\ cx & ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$b = -c, d = a$. Réciproquement supposons que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z(x + iy), z = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = \alpha x - \beta y \\ cx + dy = \alpha y + \beta x \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Si $x = 1, y = 0 \Rightarrow a = \alpha, b = -\beta, c = \beta, d = \alpha$. ■

Théorème $D \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Alors $f'(z_0)$ existe $\Leftrightarrow f$ est différentiable (en tant que fonction réelle) au point $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Si $f'(z_0)$ existe on a

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0) \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) (x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) \end{aligned}$$

Si $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ existent et sont continues sur D et s'ils satisfont les équations de C-R, alors f est dérivable sur D et f' est continue en (x_0, y_0) .

Démonstration Supposons que $f'(z_0)$ existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Prenons ici $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &\downarrow \text{hyp} \quad \text{et} \quad \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &\exists f'(z_0) \end{aligned}$$

Donc on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Prenons $z = x_0 + iy$.

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\frac{1}{i} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0}}{\frac{1}{i}} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &\downarrow \text{hyp.} \\ f'(z_0) &\Rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \end{aligned}$$

Conclusion

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \end{aligned}$$

Valable $\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Revenons à la définition de $f'(z_0)$.

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ t.q. si } 0 < |z - z_0| < \delta(\epsilon) \\ \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0| \end{aligned}$$

Par définition $Df(x_0, y_0)$ est l'unique matrice t.q. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ t.q. si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0|$. Donc,

si $f'(z_0)$ existe $\Rightarrow Df(z_0)$ existe car la multiplication avec un nombre complexe est une application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Donc $Df(z_0)$ existe.

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (z_0)$$

Mais elle représente la multiplication complexe avec $f'(z_0)$. Selon le lemme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

Réciproquement, si f est différentiable (fonction réelle) en z_0 et C-R valable alors $Df(x_0, y_0)$ représente une multiplication complexe (par le lemme). Par l'unicité de $f'(z_0)$ (s'il existe) on a nec. que $f'(z_0)$ existe et est égal à $Df(x_0, y_0)$. ■

4.3.3 Théorème de la fonction inverse

Fonction inverse ! Théorème de la

Théorème

Cas réel $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $C^k, k \geq 1$, et $\det(Df(x_0, y_0)) \neq 0$. Alors $\exists U \ni (x_0, y_0), \exists V \ni f(x_0, y_0)$ t.q. $f : U \rightarrow V$ est bijective et $f^{-1} : V \rightarrow U$ est aussi $C^k, k \geq 1$, et

$$Df^{-1}(f(x_0, y_0)) = (Df(x_0, y_0))^{-1}$$

Cas complexe $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $C^k, k \geq 1$, et $f'(z_0) \neq 0$. Alors $\exists U \ni z_0, \exists V \ni f(z_0)$ t.q. $f : U \rightarrow V$ est bijective et $f^{-1} : V \rightarrow U$ est $C^k, k \geq 1$, avec

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad f(z) = w \quad .$$

Démonstration $f = u + iv, f$ dérivable.

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \stackrel{\text{CR}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(Df(x_0, y_0)) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z_0)|^2$$

Donc $\det(Df(x_0, y_0)) \neq 0 \Leftrightarrow f'(z_0) \neq 0$.

La seule chose qui reste est de démontrer que f^{-1} est \mathbb{C} -dérivable. On sait déjà que f est \mathbb{R} -différentiable, donc il nous faut vérifier CR.

$$(Df)^{-1} = \frac{1}{\det(Df)} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Écrivons $f^{-1}(v, y) = t(x, y) + is(x, y)$. Donc

$$Df^{-1}(f(z_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix} (f(z_0))$$

en $f(z_0) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{1}{\det(Df)} \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{\text{CR}}{=} \frac{1}{\det(Df)} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} &= -\frac{1}{\det(Df)} \frac{\partial v}{\partial x} \stackrel{\text{CR}}{=} \frac{1}{\det(Df)} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial y} &= -\frac{1}{\det(Df)} \frac{\partial u}{\partial y} \stackrel{\text{CR}}{=} \frac{1}{\det(Df)} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{1}{\det(Df)} \frac{\partial u}{\partial x} \stackrel{\text{CR}}{=} \frac{1}{\det(Df)} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y}$ et $\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\partial s}{\partial x}$ qui est CR pour f^{-1} . Donc f^{-1} est \mathbb{C} -der.

Finalement

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \left(\frac{\partial t}{\partial x} + i\frac{\partial s}{\partial x}\right)(f(z_0)) = \frac{1}{\det(Df(f(z_0)))} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{f'(z_0)} .$$

Définition $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in C^2$ est harmonique, si

$$\nabla^2 u = \Delta u = 0$$

Propriété $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in C^2$, $f = u + iv$, alors u, v sont harmoniques.

Démonstration

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{\text{CR}}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \stackrel{\text{CR}}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

Pour v on fait la même chose. ■

Définition Si $\exists f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, t.q. $f = u + iv$, alors u, v sont les fonctions harmoniques conjuguées.

Exemple $u = x^2 - y^2, v = 2xy$
 $u + iv = x^2 - y^2 + i2xy = (x + iy)^2 = z^2$
 $f(z) = z^2 = u + iv$. Alors u, v sont harmoniques conjuguées.

Propriété Si

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x, y) = C_1\} \\ \gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v(x, y) = C_2\} \end{aligned}$$

sont les courbes lisses (avec u, v harmoniques), donc $\gamma_1 \perp \gamma_2$.

Démonstration γ_1, γ_2 sont lisses $\Rightarrow \nabla u, \nabla v \neq 0$.

$\nabla u \perp \gamma_1$. Si $(x(t), y(t))$ est paramétrisation de $\gamma_1 \Rightarrow u(x(t), y(t)) = C_1$.

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), y(t))) = 0 = \nabla u \cdot (x'(t), y'(t)) \Rightarrow \nabla u \perp \gamma_1.$$

Pour le même argument $\nabla v \perp \gamma_2$.

Alors $\gamma_1 \perp \gamma_2 (\gamma_1' \perp \gamma_2') \Leftrightarrow \nabla u \perp \nabla v = 0$. Mais

$$\nabla u \cdot \nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

On sait que si $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, t = u + iv \Rightarrow u, v$ sont harmoniques. Est-ce que le réciproque est vrai? Existe-t-il $v, v \in C^2$, tq. $f = u + iv$ est de C^1 , $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$? La réponse dépend de la topologie du domaine D . ■

Si D est un disque \Rightarrow la réponse est oui.

Propriété $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique, $D = D(z_0, r)$.

Alors

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, s) ds - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0) dt$$

est une harmonique conjuguée.

Démonstration A faire comme exercice. ■

Généralisation Si D est simplement connexe donc

$$v = \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

est une harmonique conjuguée.

Exemple $u(x, y) = \sin x \cosh y$. Trouvez une harmonique conjuguée.

Solution

1. Vérifiez $\Delta u = 0$.
2. $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y \stackrel{\text{CR}}{=} \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \cos x \sinh y + g(x)$
 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sinh y + g'(x) \stackrel{\text{CR}}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x \sinh y \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow v = \cos x \sinh y + C$

△

Corollaire Si D est ouvert en \mathbb{R}^2 , $z_0 \in D$, u est harmonique sur D .
Alors $\exists D(z_0, r)$ où u a une harmonique conjuguée.

Exemple $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f \in C^2, |f(z)| = \text{const}$ sur D . Demontrez que $f = \text{const}$.

Solution $f = u + iv, |f(z)| = \text{const} \Leftrightarrow u^2 + v^2 = C \geq 0$.

Si $C = 0 \Rightarrow u^2 = v^2 = 0 \Rightarrow f = 0$

Si $C \neq 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(u^2 + v^2) = u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

On a un système linéaire. $\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$. Alors

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow f = \text{const}.$$

△

Dérivées des fonctions élémentaires

Identiques aux dérivées réelles pour $e^z, z^n, \sin z, \dots$ Mais $\log z$ a différentes branches.

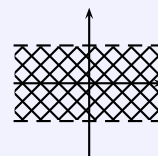
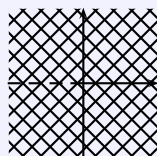
$$\log z = \log r e^{i\varphi} = \log r + i\varphi, \quad \varphi \in (-\pi, \pi), \quad D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-.$$

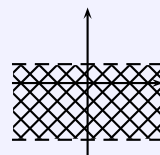
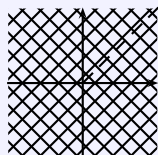
Commentaire:
Semestre 4
commence ici

4.3.4 Dérivées des fonctions élémentaires

1. $(e^z)' = e^z$ en utilisant CR.
2. $(\text{Log } z)' = \frac{1}{z}$ en utilisant le théorème de la fonction inverse.
3. Fonction élémentaires comme d'habitude.

Exemple On peut choisir plusieurs branches du log.





$$\mathbb{C} \setminus \{x + ix \mid x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R} \times] -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} [$$

Exemple Trouver la domaine de dérivabilité de la fonction

$$z \mapsto e^{e^z}$$

et calculer la dérivée.

Solution e^z est dérivable partout $\Rightarrow e^{e^z}$ l'est aussi.

$$(e^{e^z})' = e^{e^z} e^z$$

△

Autres exemples...

Exemple $z \mapsto \sqrt{e^z + 1}$

Solution $w \mapsto \sqrt{w}$ est dérivable dans $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \mid y = 0, x \leq 0\}$ (Choix de la branche principale). Maintenant il faut choisir un domaine telle que si z est ce domaine, alors $e^z + 1$ n'est pas à la fois réelle et ≤ 0 . Puisque $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, e^z est réelle

$$\Leftrightarrow y = \text{Im } z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Avec $|e^z| = e^x$:

Si k est pair : $\Rightarrow e^z \geq 0$.

Si k est impair : $\Rightarrow e^z \leq 0$.

Donc soit

$$d = \mathbb{C} \setminus \{x + iy \mid x \geq 0, y = (2k + 1)\pi\}$$

Sur D la fonction est dérivable

$$(\sqrt{e^z + 1})' = \frac{1}{z}(e^z + 1)^{-1/2} e^z$$

△

4.3.5 Intégrales curvilignes

Définition γ un arc lisse dans \mathbb{C} .

$$z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$$

$f(z)$ fonction complexe continue sur voisinage ouvert de γ , alors **l'intégrale curviligne** de f le long γ est définie par

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(z(t))z'(t) dt = \dots = \int_{\gamma} (z dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx)$$

avec $f = u + iv$.

Propriété Cette intégrale est définie comme pour les fonctions vectorielles. Donc les mêmes propriétés.

1. linéarité
2. $\int_{-\gamma} = - \int_{\gamma}$
3. $\int_{\gamma_1 * \gamma_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$
4. Reparamétrisation $\int_{\tilde{\gamma}} = \int_{\gamma}$
5. Longueur d'arc $\gamma : l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

Propriété Soit f continue sur D , γ est C' par morceaux dans D , $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)| \geq 0$. Alors $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq Ml(\gamma)$

Plus générale

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz|$$

Où $\int_{\gamma} |f| |dz| = \int_a^b |f(r(t))| |r'(t)| dt$.

Sans démonstration

□

Théorème $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, courbe C' par morceaux, f définie et dérivable sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$, D contient γ . Supposons que f' est continue (on va voir plus tard que c'est automatiquement le cas). Alors

$$\int f'(z) dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

Sans démonstration

□

Remarque γ est **arbitraire**, avec $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ fixes.

Corollaire f dérivable sur un ouvert connexe D . Si $f'(z) = 0 \Rightarrow f = \text{const}$ sur D .

Démonstration Soit $z_0 \in D$ et $z \in D$. Puisque D est connexe, $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow D$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$.

$$f(z) - f(z_0) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) =$$

Par le théorème

$$= \int_{\gamma} f'(z) dz = 0 \Rightarrow f(z) = f(z_0), \quad \forall z \in D \Rightarrow f \text{ continue}$$

■

Théorème de l'indépendance de l'arc $D \subset \mathbb{C}$ ouvert.

$f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $z_0, z_1 \in D$, γ_0, γ_1 arc lisses par morceaux dans D joignant z_0 à z_1 .
Alors

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

2. Si γ est un arc fermé, lisse par morceaux dans D , alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

3. Il existe une antiderivée globale de f sur D : $\exists F : D \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable, telle que $F'(z) = f(z), \forall z \in D$.

Démonstration

(1) \Rightarrow (2) : $\gamma = \gamma_1 * (-\gamma_0)$, donc $\int_{\gamma} f(z) dz = \dots = 0$

(2) \Rightarrow (1) : Même technique.

(3) \Rightarrow (1) : Voir corollaire du théorème précédente.

(1) \Rightarrow (3) : Il faut définir sur D l'antiderivée. Soit $z_0 \in D, z \in D, \gamma(t)$ un arc de z_0 à z (D connexe).

On pose

$$F(z) = \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$$

On a une fonction $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ parce que (1) dit que $\int_{\gamma} f(\xi) d\xi$ ne dépend pas de γ . Elle dépend aussi de z_0 , mais z_0 est fixe.

On va montrer que F est dérivable et $F' = f$. Soit $\epsilon > 0$, puisque D est ouvert et f continue $\exists \delta > 0$ telle que $D(z; \delta) \subset D$ et $|f(\xi) - f(z)| < \epsilon$ si $|\delta - z| < \delta$. Soit $w \in D$ telle que $|w - z| < \delta$. On lie w à z par un segment de droite φ . Alors

$\rho \subset D(z, \delta)$ et on a $F(w) - F(z) = \int_{\gamma^* \rho} f(\xi) d\xi = \int_{\rho} f(\xi) d\xi$. Donc on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| &= \frac{|F(w) - F(z) - (w - z)f(z)|}{|\omega - z|} \\ &= \frac{\left| \int_{\rho} f(\xi) d\xi - f(z) \rho \right|}{|\omega - z|} \\ &= \frac{\left| \int_{\rho} (f(\xi) - f(z)) d\xi \right|}{|\omega - z|} \\ &= \frac{\epsilon l(\rho)}{|\omega - z|} = \frac{\epsilon |\omega - z|}{|\omega - z|} = \epsilon \end{aligned}$$

Donc $F'(z)$ existe et est égale à $f(z)$. ■

Remarque Si γ est fermé on remplace $\int_{\gamma} f(z) dz$ par $\oint_{\gamma} f(z) dz$.

Leçon du
2007-03-19

Exemple Soit γ le cercle unité centré à l'origine.

$$\oint_{\gamma} z^n = \begin{cases} 0 & \omega \in \mathbb{Z}, n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Solution $\gamma(t) = \cos(t) + i \sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t)^n (-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos nt + i \sin nt)(-\sin t + i \cos t) dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt + i \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \omega \in \mathbb{Z}, n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

△

4.3.6 Théorème de Cauchy

On rappelle le théorème de GREEN $P(x, y), Q(x, y) \in C^1$ sur l'ouvert $D \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, γ l'arc fermé, lisse par morceaux. A région t.q. $\partial A = \gamma, A \subset D$. γ orienté positivement. Alors

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Théorème $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable avec f' continue dans l'intérieur d'une courbe fermée simple. Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Démonstration Soit $f = u + iv, f \in C' \Rightarrow u, v \in C'$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + i dy) \\ &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \iint_A \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ par } \mathbb{C}\mathbb{R}} dx dy + \iint_A \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ par } \mathbb{C}\mathbb{R}} dx dy = 0 \end{aligned}$$

■

Remarque Si on regarde de près la dem. il s'avère que f de classe C^1 n'est pas nécessaire. Il faut aussi éliminer l'hypothèse que γ est simple.

Exemple $f(z) = \frac{1}{z}$ n'est pas dérivable pour $z = 0$. On a vu que $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

Théorème de déformation $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur D ,
 γ courbe simple fermée.
 Supposons que γ peut être déformée continuellement dans D dans une autre courbe simple fermée $\tilde{\gamma}$. Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

Démonstration On regarde la région entre γ et $\tilde{\gamma}$. On forme la courbe fermée : $\gamma * \gamma_0 * (-\tilde{\gamma}) * (-\gamma_0)$.

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{\Rightarrow} 0 = \int_{\gamma * \gamma_0 * (-\tilde{\gamma}) * (-\gamma_0)} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz$$

Remarque La démonstration n'est pas "propre". Il manque un argument de limite. ■

Rappel $D \subset \mathbb{C}$ est simplement connexe, si D est connexe et si chaque courbe fermée continue peut être déformée continuellement dans un point.

Corollaire f dérivable sur D , simplement connexe $\Rightarrow \oint f(z) dz = 0$ pour chaque γ fermée.

Théorème de l'indépendance de l'arc (continué)

$f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, D simplement connexe ouvert. Alors pour tous les arcs

$\gamma_1, \gamma_2 \in C^1$ par morceaux dans D on a

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Commentaire:
Hinweis :
analytisch =
holomorph

Démonstration $\gamma_1 * (-\gamma_2)$ fermée. On applique le corollaire

$$\int_{\gamma_1 * (-\gamma_2)} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \quad .$$

■

Théorème de l'antidérivée f dérivable sur D , D ouvert, simplement connexe. Alors $\exists F$ dérivable sur D , unique à une constante près, telle que $F' = f$.

Démonstration

L'existence est un corollaire du théorème d'indépendance de l'arc.

Unicité à une constante près : F_0 une autre antidérivée, donc $(F_0 - F)'(z) = F_0'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0 \Rightarrow F_0 - F$ a dérivé zéro sur un connexe D . Donc $F_0 - F = \text{const}$.

■

Corollaire (Même hypothèses). f dérivable. F antidérivée. Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

pour chaque γ qui lie z_1 à z_2 .

Si D n'est pas simplement connexe le théorème de l'antidérivée n'est pas valable.

Exemple $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{z}$.

Il n'existe pas de F t.q. $F' = f$ parce que $\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i$. Si $\{0\} \notin D$ l'existence de F est possible.

Exemple $f(z) = \frac{1}{z^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$F(z) = -\frac{1}{z}$$

4.3.7 Existence des logarithmes

D ouvert simplement connexe, $0 \notin D$. Alors $\exists F(z)$ dérivable sur D unique à une addition de $2\pi ik$ près, t.q. $e^{F(z)} = z$

Démonstration Par le théorème de l'antidérivée $\exists F$ dérivable sur D t.q. $F'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in D$. ■

Fixons $z_0 \in D$. Alors z_0 est dans le domaine d'une branche du log. On ajoute à F la constante nécessaire telle que $F(z_0) = \log(z_0)$. Alors on a $e^{F(z_0)} = z_0$. Il faut démontrer que $e^{F(z)} = z, \forall z \in D$. Pour la démonstration on forme

$$g(z) = \frac{e^{F(z)}}{z}$$

$0 \notin D \Rightarrow \exists g'(z) :$

$$g'(z) = \frac{e^{F(z)} F'(z) z - e^{F(z)}}{z^2} = \frac{e^{F(z)}}{z^2} = \left(\frac{1}{z} z - 1\right) z^{-2} = 0$$

D connexe $\Rightarrow g(z) = \text{const}$. Mais $g(z_0) = 1 \Rightarrow g(z) \equiv 1 \Rightarrow e^{F(z)} = z, \forall z \in D$
Il faut encore démontrer que si F et G sont dérivable avec $e^{F(z)} = e^{G(z)} = z \Rightarrow F(z) - G(z) = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$.

$$e^{F(z)} = e^{G(z)} \Leftrightarrow e^{F(z)-G(z)} = 1 \Rightarrow e^{F(z_0)-G(z_0)} = 1 \Rightarrow F(z_0) - G(z_0) = 2\pi ik$$

D'autre part $F'(z) = \frac{1}{z} = G'(z) \Rightarrow (F(z) - G(z))' = 0 \Rightarrow F(z) - G(z) = \text{const}$.
Mais $F(z_0) - G(z_0) = 2\pi ik$.

On écrit $F(z) = \log z$ et on dit que F est une branche du log. ■

4.3.8 Remarques importantes sur le théorème de Cauchy

(donné sans démonstration régulière, § 2.3).

1. f dérivable $\Rightarrow f'$ continue. Remarque de GONNET 1884. On va voir.
2. R rectangle avec les cotés parallèles aux axes. f continue et dérivable dans $D \supset R$. Alors

$$\int_R f(z) dz = 0$$

Attention On n'a pas la continuité de $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

3. On utilise le théorème préc (2), pour démontrer le théorème de Cauchy dans un disque : $f : D(z_0, \rho) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable. Alors
 - (i) f a une antiderivée : $\exists F' = f$.
 - (ii) Si γ est une courbe fermée dans $D(z_0, \rho)$ on a $\oint_\gamma f(z) dz = 0$.

Stratégie pour la démonstration

1. On démontre (ii) si γ est un rectangle.
2. On montre que cette condition spéciale d'indépendance de l'arc est suffisante pour donner une antiderivée.
3. Avec (i) comme on revient sur (ii) et on le démontre.

On peut faire mieux !

4. R rectangle cotés parallèles aux axes. D ouvert, $D \supset R$ et son int. f dérivable sur D à l'exception d'un point $z_1 \in D$, z_1 n'est pas sur le bord du R . Supposons que

$$\lim_{z \rightarrow z_1} f(z)(z - z_1) = 0$$

Alors

$$\int_R f(z) dz = 0$$

5. Si on suppose que f est continue en z_1 , on peut éviter l'hypothèse que z_1 n'est pas sur le bord du rectangle. R rectangle cotés parallèles aux axes $D \supset R$: f continue sur D , f dérivable sur D à l'exception de $z_1 \in D \Rightarrow \int_R f(z) dz = 0$. Même conclusion pour un nombre fini des points "mauvaises".
6. **Théorème de déformation**
 $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable γ_0, γ_1 arc de classe C^1 par morceaux dans D .

- (i) Si γ_0 et γ_1 sont homotopes avec extrémités fixes $\Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$.
- (ii) Si γ_0, γ_1 sont arcs fermés homotopes on a $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$.

4.3.9 Homotopie

$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$

- $H(0, t) = \gamma_0(t), \forall t \in [0, 1]$
- $H(1, t) = \gamma_1(t), \forall t \in [0, 1]$
- $H(s, 0) = z_0$
- $H(s, 1) = z_1$

γ_0, γ_1 fermés.

simplement connexe Chaque courbe continue, fermée est homotope à un point.

Version homotopique du théorème de Cauchy Soit f dérivable sur un ouvert D . Soit γ courbe fermé homotope à un point dans D , alors $\int_{\gamma} f dz = 0$.

4.3.10 Formules intégrales de Cauchy

Index d'une courbe près à un point $I(\gamma, z_0) = \dots$

Ici il manque un image

Comment exprimer cet index à l'aide d'une intégrale curviligne

- Soit $\gamma(t) = e^{i\pi t}, t \in [0, 2\pi]$, alors

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 1$$

- Soit $\gamma(t) = e^{i\pi t}, t \in [0, 2\pi n]$, alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = n$$

- Soit $\tilde{\gamma}$ fermé et homotope à $\gamma(\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi])$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors par le

thm. de déformation on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = n$$

- On peut clairement faire le même chose raisonnement pour un $z_0 \in \mathbb{C}$ qcq. Il suffit de considérer la courbe $\gamma(t) = z_0 + e^{it}$. et on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = n$$

- Si γ est simple on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } z_0 \text{ est dans l'intérieur de } \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rappel Qu'est-ce que l'intérieur d'une courbe fermée?

de Jordan Soit γ une courbe simple continue et fermée, alors γ croise le plan en 2 parties convexes. L'une de ces parties est bornée, on l'appelle **l'intérieur** de γ .

L'intérieur est caractérisé les z_0 t.q.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \neq 0 \quad .$$

Définition Soit γ une courbe fermée dans \mathbb{C} , soit $z_0 \notin \gamma$. **L'index de γ pr. à z_0** est

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \quad .$$

Propriété

1. Le cercle $\gamma(t) = z_0 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi n]$ a l'index n , pr. à z_0 .
Le cercle $\gamma(t) = z_0 + e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi n]$ a l'index $-n$, pr. à z_0 .
2. Si $z_0 \notin \gamma$, $z_0 \notin \tilde{\gamma}$ et si γ et $\tilde{\gamma}$ sont homotopes, alors

$$I(\gamma, z_0) = I(\tilde{\gamma}, z_0)$$

Propriété Soit γ une courbe C^1 par morceaux et fermée, soit $z_0 \notin \gamma$ alors $I(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.

Démonstration Soit $g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(\zeta)}{\gamma(\zeta) - z_0} d\zeta$ où γ est C^1 on a $g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$.

$$\frac{d}{dt} (e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)) = \dots = 0$$

Donc $e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est constante par morceaux, or elle est continue, donc elle est constante

$$\dots \Rightarrow g(b) = 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}$$

or $g(b) = 2\pi i I(\gamma, z_0) \Rightarrow I(\gamma, z_0) = k \in \mathbb{Z}$. ■

Remarque On peut montrer que $I(\gamma, z_0)$ est une fonction continue en z_0 , donc $I(\gamma, z_0)$ ne dépend pas de z_0 . lorsque celui ci ne croise pas γ (car on a une fonction continue à valeur dans \mathbb{Z} , donc elle doit être constante).

L'intérieur de γ est $\{z \in \mathbb{C} \mid I(\gamma, z) \neq 0\}$.

Formule intégrale de Cauchy Soit f d'érivable sur D ouvert, γ courbe fermé dans D , homotope à un point $z_0 \in D$. Alors

$$f(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Démonstration (On a besoin de la version optimale du théorème de Cauchy : f continue sur D , dérivable sur $D \setminus \{z_0\}$.) Soit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z) & \text{sinon} \end{cases} .$$

Alors g est continue sur D et dérivable sur $D \setminus \{z_0\}$. Par Cauchy on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) 2\pi i I(\gamma, z_0) . \end{aligned}$$

Donc $f(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. ■

Remarque

1. Si γ est simple et orienté positivement on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Cette formule est remarquable car elle montre que la fonction f est complètement déterminée, à l'intérieur de γ , par ses valeurs sur γ .

2. Si $f(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$, on retrouve $I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$.
3. On peut affaiblir les hypothèses : f continue sur γ et dérivable à l'intérieur de γ .

Exemple

$$\int_{S^1} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i I(S_1, 0) e^0 = 2\pi i$$

Propriété Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe fermée dans \mathbb{C} , soit g une fonction continue sur $\gamma([a, b])$, soit

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Alors G est dérivable sur $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, de plus G est de classe C^∞ et $G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$.

Sans démonstration

□

4.3.11 Formule de Cauchy pour les dérivées

Théorème Soit f dérivable sur D , ouvert de \mathbb{C} .

Alors f est infiniment dérivable.

De plus, si $z_0 \in D$ et γ est une courbe fermée homotope à un point, avec $z_0 \notin \gamma([a, b])$, alors

$$f^{(k)}(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Démonstration D ouvert et $z_0 \notin \gamma([a, b])$ donc \exists un cercle γ_0 avec centre z_0 et qui n'intersecte pas γ . Pour $z \in D$, $z \notin \gamma([a, b])$ on définit

$$G(z) = \underbrace{f(z)}_{(1)} \underbrace{I(\gamma, z)}_{(2)} \stackrel{\text{Form. Int. Cauchy}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(*)}$$

(*) : c'est une fonction C^∞ sur $D \setminus \gamma([a, b])$, donc C^∞ au vge de z_0 .

De plus $C^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$ (par la prop. préc.). On a aussi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta \in C^\infty \text{ au vge. de } z_0$$

(2)

$I(\gamma, z_0)$ est constante au vge de z_0

Donc en dérivant la formule $G(z) = f(z)I(\gamma, z)$

$$\begin{aligned} G^{(k)}(z_0) &= f^{(k)}(z_0)I(\gamma, z_0) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Donc $f^{(k)}(z_0)I(\gamma, z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$. ■

4.3.12 Les inégalités de Cauchy

Propriété Soit f dérivable sur D , γ un cercle de rayon R et de centre z_0 dans D . Supposons que $|f(z)| \leq M, \forall z \in D$.
Alors $\forall k \in \mathbb{N} \quad |f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} M$.

Démonstration Puisque $I(\gamma, z_0) = 1$, on a

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad .$$

$$\Rightarrow |f^{(k)}(z_0)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \right| |d\zeta|$$

avec $\int_{\gamma} |f| |d\zeta| \leq \max |f| l(\gamma)$

$$= \dots = \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}} 2\pi R = \frac{k!}{R} M$$

■

Théorème de Liunville f dérivable et bornée sur \mathbb{C} ($|f| \leq M$) $\Rightarrow f$ constante.

Théorème fondamentale d'algèbre Chaque polynôme de degré ≥ 1 a une racine complexe

Démonstration Soit $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, a_i \in \mathbb{C}$. Il faut démontrer que $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ t.q. $p(z_0) = 0$. Supposons le contraire c'ad $p(z_0) \neq 0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$. Alors $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Puisque $p(z)$ n'est pas const $\Rightarrow f(z)$ est bornée, Liouville implique une contradiction. On va démontrer que $f(z)$ bornée et $p(z) \rightarrow \infty$ si $z \rightarrow \infty \Rightarrow f(z) \rightarrow 0$ si $z \rightarrow \infty$.

Concrètement on va dém. que $\forall M > 0, \exists k > 0$ t.q. si $|z| > k \Rightarrow |p(z)| > M (\Leftrightarrow |f(z)| < \frac{1}{M})$. On écrit

$$\begin{aligned} a_n z^n &= p(z) - a_0 - a_1 z - \dots - a_{n-1} z^{n-1} \\ \Rightarrow |a_n| |z|^n &\leq |p(z)| + |a_0| + \dots + |a_{n-1}| |z|^{n-1} \\ \Rightarrow |p(z)| &\geq \dots \geq |z|^{n-1} (|a_n| |z| - a) \end{aligned}$$

avec $|z| \geq 1$ et $a = |a_0| + \dots + |a_{n-1}|$.

Soit $k = \max(1, \frac{M+a}{|a_n|})$ Alors, si $|z| \geq k \Rightarrow |p(z)| \geq M$. En effet

$$|p(z)| \geq \dots = M \quad .$$

Donc, si $|z| > K \Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{M}$. Mais, sur l'ensemble $|z| \leq K, |f(z)|$ est une fonction constante, donc (Weierstrass) le max est atteint. $\Rightarrow |f(z)|$ est bornée. ■

Corrolaire Un polynôme complexe de degré $n \geq 1$ a exactement n racines, comptées avec multiplicité.

Démonstration Le thm. de Cauchy dit que l'intégrale d'une fonction dérivable autour d'une courbe fermée est zéro. La réciproque est aussi vraie. ■

Théorème de Morera f cont sur D et supposons que $\int_{\gamma} f = 0, \forall \gamma$ fermée dans D . Alors f est dérivable et $f = F'$ par une fonction dérivable F sur D .

Démonstration Existence de F : conséquence du théorème de l'indépendance de l'arc. L'antidérivée F est dérivable par définition : $F' = f$. Mais alors la formule de Cauchy par les dérivées (appliqué à F) montre que F est C^{∞} . En particulier $\exists F'' = f'$. ■

Corollaire f continue sur D dérivable sur $D \setminus \{z_0\}, z_0 \in D$. Alors f est dérivable sur D .

Démonstration Il faut démontrer que f est dérivable en z_0 . Soit $D(z_0, \rho) \subset D$ disque, γ courbe fermée dans $D(z_0, \rho)$. Mais alors la forme forte du théorème de Cauchy $\Rightarrow \int_{\gamma} f = 0$. Donc, par Morera, f est dérivable sur le $D(z_0, \rho)$ donc en z_0 . ■

Discussion sur les logarithmes On a vu que sur les domaines simplement connexe qui ne contient pas l'origine, le logarithme existe. On généralise.

Le logarithme des fonctions f dérivable, jamais 0 sur D simplement connexe. Alors $\exists g(z)$ dérivable sur D et unique à une addition de $2\pi ik$ telle que $e^{g(z)} = f(z)$.

Démonstration Soit $g(z)$ une telle fonction. Alors

$$f'(z) = e^{g(z)} g'(z) = f(z) g'(z) \Rightarrow g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

(Parceque $f(z) \neq 0 \forall z$.)

Donc $g(z)$ est forcément la primitive de $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Puisque la différence de deux primitive a dérivée = 0 \Rightarrow const. Mais la nouvelle fonction est aussi un $\log f(z) \Rightarrow$

différence $= 2\pi ik$. Il reste à démontrer l'existence. Puisque f'' existe $\Rightarrow f'$ est dérivable sur D . Mais $f(z) \neq 0 \forall z \in D$. Par le théorème d'antidérivée $\exists g : D \rightarrow \mathbb{C}$ t.q. $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \forall z \in D$. Soit $z_0 \in D$ fixe. Arranger l'antidérivée (en ajoutant une constante) t.q. $g(z_0) = \log f(z_0)$. Soit $k(z) = \frac{e^{g(z)}}{f(z)}$. On a

$$k'(z) = \frac{e^{g(z)} f'(z) - e^{g(z)} g'(z) f(z)}{f^2(z)} = \frac{e^{g(z)} \frac{f'(z)}{f(z)} f(z) - e^{g(z)} f'(z)}{f^2(z)} = 0$$

Mais $k(z_0) = \frac{e^{\log f(z_0)}}{f(z_0)} = 1 \Rightarrow k(z) \equiv 1 \Rightarrow e^{g(z)} = f(z)$. ■

4.4 Le théorème du module maximal et fonctions harmoniques

Le théorème de la moyenne f est dérivable dans un cercle de rayon r et centre z_0 .

Alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \quad .$$

Démonstration Par Cauchy :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

où $r(\theta) = z_0 + r e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \dots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta$$

Commentaire:
(todo) Le r dans
cette formule
pourrait être faux

Forme locale du théorème du module maximal $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable. Supposons que $|f|$ a un maximum local au point $z_0 \in D$. (càd. $|f(z)| \leq |f(z_0)|, \forall z$

dans un disque autour de z_0). Alors f est constante sur ce disque.

Version globale du théorème du module maximal $D \subset \mathbb{C}$ ouvert, connexe, borné et $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur D est continue sur \overline{D} . Alors $|f|$ a un max fini sur \overline{D} qui est atteint sur la frontière de $D : \overline{D} \cap (\mathbb{C} \setminus D)$. Si le max est atteint aussi dans l'intérieur de D alors f est constante.

Démonstration $|f| : \overline{D} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Par WEIERSTRASS le max et min sont atteints dans \overline{D} .

Soit $M = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = |f(z_0)|$ pour un $z_0 \in \overline{D}$.

– Soit z_0 est dans la frontière.

– Soit z_0 est dans D .

Si on montre que f est const, alors le max est atteint aussi sur la frontière. On va démontrer ça. Supposons que $\exists a \in D$ t.q. $f(a) = M$. Définissons :

$$D_1 = \{z \in D \mid f(z) = f(a)\}$$

$$D_2 = D \setminus \overline{D_1}$$

Si $z \in D_1$ et $z \notin D_2 \Rightarrow z \in \overline{D_1}$. Soit $\{z_n\} \subset D_1, z_n \rightarrow z$. f continue sur $\overline{D} \Rightarrow \underbrace{f(z_n)}_{=f(z)} \rightarrow f(z) \rightarrow f(a) = f(z) \Rightarrow z \in D_1$ On a démontré que $D \subset$

$D \cup D_2 \Rightarrow D = D_1 \cup D_2$. Mais $D_1 \subset \overline{D_1} \Rightarrow D_1 \cap D_2 = \emptyset$. D_2 est ouvert, car il est le complément d'un fermé : $\overline{D_1}$. On va démontrer que D_1 est aussi ouvert. Si $z_0 \in D_1 \Rightarrow |f(z_0)| = |f(a)| = M$ donc $|f|$ a un max local au point z_0 . Donc par la version locale, f est const. sur un disque de centre z_0 contenu dans D . Puisque D est ouvert, le disque est cont dans D pour un rayon petit. Alors ce disque est cont. dans $D_1 \Rightarrow D_1$ est ouvert.

Conclusion : $D = D_1 \cup D_2; D_1 \cap D_2 = \emptyset; D_1, D_2$ ouverts. Mais D est connexe, par l'hypothèse \Rightarrow c'est impossible. Soit D_1 soit D_2 sont $\emptyset, a \in D_1 \Rightarrow D_1 \neq \emptyset \Rightarrow D_2 = \emptyset \Rightarrow D = D_1 \Rightarrow \forall z \in D = D_1$ on a $f(z) = f(a)$. ■

4.4.1 Etude des fonction harmoniques

On sait déjà que si f est dérivable $\Rightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ sont harmoniques et C^∞ . La réciproque est vraie.

Propriété $D \subset \mathbb{C}$ ouvert, $u \in C^2(D)$ harmonique ($\Delta u = 0$). Alors $u \in C^\infty(D)$ et dans un voisinage de chaque point $z_0 \in D$. u est la partie réelle

d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Si D est simplement connexe, alors il existe une fonction dérivable $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ t.q. $u = \operatorname{Re} f$

Démonstration On démontre la deuxième partie. Soit

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Alors, on va voir que g est dérivable. Ecrivons $g = U + iV$, où $U = \frac{\partial u}{\partial x}$, $V = \frac{\partial u}{\partial y}$ sont de classe C^1 (parce que $u \in C^2(D)$).

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ils sont cont. par hyp. De plus $\Delta u = 0$ par hyp. $\Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$. Mais on a aussi

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\partial V_x$$

Donc $C(R)$ vrai. $\Rightarrow g$ est dérivable. D simplement connexe $\Rightarrow \exists f$ dérivable t.q. $f' = g$ (Thm. d'antidérivée).

Soit $f = \tilde{u} + i\tilde{v} \Rightarrow f' = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{u} - u}{\partial x} = 0, \frac{\partial \tilde{v} - v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \tilde{u} - u = \text{const} \Rightarrow \tilde{u} = u + C$. Rempl. f par $f - C \Rightarrow u = \operatorname{Re} f$. La deuxième partie est démontrée.

Première partie : Si D_r est le disque de centre z_0 , rayon $r \Rightarrow D_r$ est simplement connexe. Donc dans D_r il existe f dérivable t.q. $u = \operatorname{Re} f$.

Finalement, dans les deux cas $f \in C^\infty \Rightarrow u = \operatorname{Re} f \in C^\infty$. ■

Corollaire Sur chaque domain D simplement connexe, chaque fonction harmonique a une conjuguée.

Propriété u harmonique sur un ouvert B , $f : A \rightarrow B$ dérivable $A, B \subset \mathbb{C} \rightarrow u \circ f$ harmonique sur A .

Théorème de la moyenne u harmonique sur un ouvert conenant $D(z_0; r)$.
Alors $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, z_0 = x_0 + iy_0$.

Démonstration On prends la partie réelle pour $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable. ■

Leçon du
2007-04-16

4.4.2 Le Principe du maximum - version locale

u harmonique dans D ouvert $\subset \mathbb{C}$. Supposons que u a un max. local en $z_0 \in D$. Alors u est constante dans un voisinage de z_0 (même chose avec un minimum).

Démonstration Sur un disque de centre z_0 , on a $u = \operatorname{Re} f$ pour un f dérivable (au sens complexe). Alors $e^{f(z)}$ est dérivable et $|e^{f(z)}| = e^{u(z)}$. Comme $x \rightarrow e^x$ est strictement croissante, donc les points de max. de u sont les mêmes que ceux de $|e^{f(z)}|$. Par le thm. du max. du module, e^f const dans un vois. de z_0 . Donc e^u et donc u sont aussi constante au vois. de z_0 . ■

Par la même méthode vue précédemment, on passe à la version globale.

4.4.3 Principe du maximum - version globale

$D \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe borné. $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et harmonique dans D . Soit $M = \max_{(x,y) \in \text{frontière de } D} u(x, y)$. Alors

1. $u(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in D$
2. si $u(x, y) = M$ pour $(x, y) \in D$ alors $u = \text{const}$ sur D .

Version pour min. : $m = \min_{(x,y) \in \text{frontière de } D} u(x, y)$. Alors

1. $u(x, y) \geq m \quad \forall (x, y) \in D$
2. si $u(x, y) = m$ pour $(x, y) \in D$ alors $u = \text{const}$ sur D .

4.4.4 Problème de Dirichlet

D ouvert borné, u_0 continue sur la frontière de D . Trouver $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue \overline{D} et harmonique sur D , telle que $u = u_0$ sur la frontière de D .

Il existent des thm. difficiles qui garantissent que si la frontière est raisonnablement lisse ou régulière, une solution u existe toujours.

Unicité de la solution : Soient u, \tilde{u} deux solutions $\Rightarrow \varphi = u - \tilde{u}$ est solution du problème de DIRICHLET avec 0 sur la frontière. Si D connexe, par le principe du max. $\varphi(x, y) \leq 0$ sur D . Par le principe du min $\varphi(x, y) \geq 0$ sur $D \Rightarrow \varphi \equiv 0$ sur D .

On va résoudre le problème de Dirichlet sur le disque : Formule de POISSON : $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$, u harmonique dans $D_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ continue sur \overline{D}_r . Alors si $\rho < r$, on a

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})}{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)} d\theta$$

Ecriture complexe

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

Remarque $u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta$ Sans démonstration en séance d'exercices. \square

Cette formule donne la solution du Problème de DIRICHLET sur le disque. Supposons que nous avons une fonction continue u_0 sur le cercle $|z| = r$. On définit u sur D_r par la formule de POISSON :

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_0(re^{i\theta})}{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)} d\theta$$

pour $\rho < r, \varphi \in [0, 2\pi]$, et on pose

$$u(re^{i\varphi}) = u_0(re^{i\varphi}) \quad .$$

Donc c'est relativement simple de montrer que u est harmonique et c'est plus difficile que $z \rightarrow u_0$ continue sur \overline{D}_r . Ce problème est que si $\rho \rightarrow r$ et $\varphi = \theta$, la formule donne $\frac{0}{0}$.

4.5 Fonctions analytiques

Définition On dit que $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est **analytique** si pour chaque $z_0 \in D$, $\exists D(z_0, \rho)$ tel que :

$$f|_{D(z_0, \rho)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, a_n \in \mathbb{C} \quad .$$

Remarque Pour les fonctions réelles on a une définition analogue. Il y a des fonctions *réelles* C^∞ qui ne sont pas analytiques. E.g.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

On démontre que $f^{(k)}(0) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$, donc le développement de TAYLOR en 0 est $\equiv 0$. dans un voisinage de 0. Pourtant f n'est pas $\equiv 0$ au voisinage de 0.

Rappel Tout ce que nous connaissons de la théorie des séries réelles reste valable.

- Série est la suite des sommes partielles.
- Converge absolue = convergence de la série des modules.
- Converge absolue \Rightarrow converge ($|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k| < \epsilon$).
- *Test de convergence* :
 1. Série géométrique
 - Si $|r| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.
 - Si $|r| \geq 1$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ est divergente.
 2. Comparaison
 - Si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ est convergente et $0 \leq a_k \leq b_k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente.
 - Si $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ est divergente et $0 \leq c_k \leq d_k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ est divergente.
 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho} = \begin{cases} \text{convergente} & \rho > 1 \\ \text{diverge} & \rho \leq 1 \end{cases}$.
 4. Rapport :
 - Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe et
 - est < 1 , alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolument convergente,
 - est > 1 , alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente,
 - est $= 1$, on sait rien.
 5. Racine :
 - Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe et

- est < 1 alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est absolument convergente,
 - est > 1 alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est absolument divergente,
 - est $= 1$, rien.
- *Convergence uniforme* : $f_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ pour tout $z \in D, \forall n \geq N$.
- La série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge **simplement** ou **ponctuellement** si la suite $s_n(z) = \sum_{k=1}^n g_k(z)$ converge pour toute valeur de z . Elle converge **uniformément** si la suite de fonctions s_n converge uniformément.
- *Critère de Cauchy* :
- La suite de fonctions f_n converge uniformément $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$ on a $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \epsilon$ pour tout $z \in D$ tout $p \in \mathbb{N}$.
 - la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformément $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, on a $|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)| < \epsilon$ pour tout $z \in D$, tout $p \in \mathbb{N}$.
- $f_n \in C^0(D), f_n \rightarrow f \Rightarrow f \in C^0(D), g_n \in C^0(D), \sum_{k=1}^n g_k(z) \rightarrow g \Rightarrow g \in C^0(D)$. La réciproque est fautive en général.

4.5.1 Test de Weierstrass

$g_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Supposons que $\exists \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}, M_n \geq 0$ tel que

- $|g_n(z)| \leq M_n, z \in D$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge
- \Rightarrow Alors $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge absolument et uniformément sur D .

Démonstration $\sum M_n$ converge $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$, on a $\forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon$. Donc pour $n \geq N$, $|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |g_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon$. On conclut par le critère de CAUCHY. ■

Propriété $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C'} D \subset \mathbb{C}$ courbe $\{f_n\}$ suite de fonctions continues sur $\gamma([a, b])$.

- $f_n \rightarrow f$ sur $\gamma([a, b])$. Alors

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz \quad .$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ convergent uniformément sur $\gamma([a, b])$. Alors $\int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} g_n(z) dz$.

Démonstration $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geq N, |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ pour tout $z \in \gamma([a, b])$.

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f_n - f| |dz| \leq \epsilon l(\gamma).$$

■

Théorème $D \subset \mathbb{C}$ ouvert.

- $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ fonctions dérivables (au sens complexe). Si $f_n \rightarrow f$ sur tout disque fermé contenu dans D , alors f est dérivable (au sens complexe). De plus $f'_n \rightarrow f'$ ponctuellement sur D et uniformément sur tout disque fermé de D .
- $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable (au sens complexe) $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ où la conv. est uniforme sur chaque disque fermé de D . Alors g est dérivable (au sens complexe) et $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(z)$ ponctuellement sur D et uniforme sur tout disque fermé contenu dans D .

Attention Pour des fonctions réelles de variable *réelle*, il faut une condition supplémentaire : La convergence ponctuelle des dérivées vers une fonction.

Conclusion Puisque dérivable au sens complexe $\Rightarrow C^{\infty}$ on peut appliquer le théorème plusieurs fois, $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ sur tout disque fermé de D .

Démonstration La démonstration est basée sur le théorème de MORERA, la formule de CAUCHY et la prop précédente.

(2) est un cas particulier de (1) en prenant la suite des sommes partielles.

(1) Soit $z_0 \in D, \overline{D}(z_0, r) \subset D. f_n \rightarrow f$ sur $\overline{D}(z_0, r) \Rightarrow f$ est C^{∞} sur $\overline{D}(z_0, r)$. On va démontrer que f est dérivable (au sens complexe) sur $D(z_0, r)$ en utilisant le théorème de MORERA.

Soit γ une courbe C^1 fermée dans $D(z_0, r)$.

f_n dérivable au sens complexe $\Rightarrow \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0$ par Cauchy et parce que $D(z_0, r)$ est simplement connexe. Par la proposition précédente, $0 = \int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Par MORERA, f est dérivable sur $D(z_0, r)$. Il faut encore démontrer que $f'_n \rightarrow f'$ sur $\overline{D}(z_0, r)$. On va utiliser les formules de CAUCHY pour les dérivées. Soit $\rho > r$ tq. $D(z_0, \rho) \subset D$. Pour $z \in \overline{D}(z_0, r)$. on

$$f'_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

Par hypothèse $f_n \rightarrow f$ sur $\overline{D}(z_0, \rho) \subset D$. Donc $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geq N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \forall z \in \overline{D}(z_0, \rho)$$

Mais γ est la frontière de ce disque $\overline{D}(z_0, \rho)$. Donc

$$|[f_n(z) - f(z)]| < \epsilon \forall \zeta \text{ sur } \gamma .$$

Puisque $|\zeta - z| > \rho - r$.

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f_n(z) - f(z)|}{|\zeta - z|^2} |dz| \leq \frac{\epsilon}{(\rho - r)^2} \rho = \frac{\epsilon \rho}{(\rho - r)^2}$$

Comme ρ et r fixés et que ϵ est indépendant du $z \in \overline{D}(z_0, r)$, ça montre que $f'_n \rightarrow f'$ sur $\overline{D}(z_0, r)$. ■

Exemple

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge uniformément sur chaque disque fermé $\overline{D}_r, r < 1$. Mais elle ne converge pas uniformément sur D_1 . Elle converge ponctuellement.

Dans le théorème précédent on n'a pas fait l'hypothèse de la convergence uniforme sur D . On applique (iii) . Donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ est dérivable et sa dérivée est $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ qui converge aussi sur D_1 . ponctuellement mais pas uniformément, la convergence est uniforme sur les disques fermés.

(i) Conv. unif. sur $\overline{D}_r, r < 1$

$$0 \leq M_n := \frac{r^n}{n} \leq r^n$$

$\Rightarrow \sum M_n$ converge (Comp.)

$$\left| \frac{z^n}{n} \right| \leq M_n$$

(si $|z| \leq r$). Par WEIERSTRASS $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformément sur \overline{D}_r . Donc cette série converge ponctuellement sur D_1 .

(ii) La convergence sur D_1 n'est pas uniforme. Si elle était uniforme alors la série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}$ convergerait aussi uniformément sur $[0, 1[$. Si c'était vrai, alors $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. si $n \geq N$

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots + \frac{x^{n+z}}{n+z} < \epsilon \quad \forall x \in [0, 1[$$

Mais la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots +$$

est divergente. En fait elle $\rightarrow \infty$. Donc $\exists \rho \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N+\rho} > 2\epsilon$$

Maintenant on choisit x t.q. $x^{N+\rho} > \frac{1}{2}(0 \leq x < 1)$. Alors

$$\frac{x^N}{N} + \dots + \frac{x^{N+\rho}}{N+\rho} \underset{(x < 1)}{>} x^{N+\rho} \left(\frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N+\rho} \right) > \epsilon$$

Contradiction Mais $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ est continue sur D_1 parce que la convergence est uniforme sur chaque \overline{D}_r .

Exemple $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge ponctuellement sur $D(0; 1)$ à la fonction $\frac{1}{1-z}$. La convergence est uniforme et absolue sur chaque $\overline{D(0; r)}, r < 1$.

Solution Si $z \in D(0; 1) \Rightarrow z \in \overline{D(0; r)}$ par $|z| \leq r < 1$. Donc la convergence ponctuelle découle de la 2ème affirmation. Soit $z \in D(0; r) \Rightarrow |z| > r_1 \Rightarrow |z|^n < r^n$. Puisque $r < 1, \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge par WEIERSTRASS. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge unif et abs. sur $D(0; r)$.

Quelle est la limite ?

$$1 - z^{n+1} = (1 - z)(1 + z^2 + \dots + z^n)$$

$$\left| \frac{1}{1 - z} - \sum_{k=1}^n z^k \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} < \frac{r^{n+1}}{1 - r}$$

Puisque $r < 1 \Rightarrow \frac{r^{n+1}}{r-r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

△

Exemple $\sum_{n=1}^{\infty} z z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ conv. dans $D(0;1)$ vers $\frac{1}{(1-z)^2}$. La convergence est uniforme et absolue sur chaque $\overline{D(0;r)}$, $r < 1$. Si B est un disque fermé $B \subset \overline{D(0;r)}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformément et alors sur B vers $\frac{1}{1-z}$. Donc par le thm. de la série des dérivées $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ converge absolument et uniformément sur B vers $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$.

(abs par comparaisons)

Commentaire:
Ici il manque un
paragraphe de
l'exemple...

Solution

△Nous

avons que $\log(\rho e^{i\theta}) = \log \rho + i\theta$, $\theta \in]-\pi, \pi[$ définit une branche du log sur $D(1;1)$. On va montrer que c'est la même branche qu'on obtient par la construction du log :

$$\log w = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

où γ est la droite de 1 à w . Par l'indép. de l'arc garantie par le thm. de Cauchy, on peut aussi intégrer le long d'un arc circulaire de centre 0 et après le long du rayon passant par w . Donc on a

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\text{nouveau chemin}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^{\theta} e^{-i\varphi} i e^{i\varphi} d\varphi + \int_1^{\rho} \frac{1}{r e^{i\theta}} e^{i\theta} dr = i\theta + \log \rho \quad .$$

Donc $\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \log(w) = \log(\rho e^{i\theta})$. On change variables $\xi = \zeta - 1$

$$\log w = \int_{\mu} \frac{d\xi}{\xi + 1} = \int_{\mu} \frac{d\xi}{1 - (-\xi)} \quad .$$

Où μ est la droite de 1 à $z = w - 1$ dans $D(0;1)$. Mais

$$\frac{1}{1 - (-\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\xi)^n$$

qui converge uniformément sur μ . Donc on peut intégrer terme par terme.

$$\log w = \int_{\mu} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-\xi)^n \right] d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mu} (-\xi)^n d\xi = \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (w-1)^n}{n} \Big|_{w=z+1} = \log(z+1)$$

Donc $\log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \forall z \in D(0;1)$. La convergence est absolue et uniforme sur chaque $\overline{D(0;r)}$, $r < 1$. Puisque $|z| \leq r \Rightarrow \left| \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \right| \leq \frac{r^n}{n} \leq r^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge. Par WEIERSTRASS

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$$

converge absolument et uniformément sur $\overline{D(0;r)}$.

Exemple La fonction ζ de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

est dér. sur $\{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$. On a

$$\zeta'(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} (\log n) n^{-z}$$

qui est une série converge pour $\operatorname{Re} z > 1$. La convergence est absolue et uniforme sur chaque disque fermé à distance $\rho > 0$ de $\operatorname{Re} z = 1$ et elle n'est pas uniforme pour $\operatorname{Re} z > 1$.

Théorème Il existe un $R \geq 0$ unique ($R = +\infty$ est possible), appelé **rayon de convergence** tel que si $|z - z_0| < R$ la série converge et si $|z - z_0| > R$ la série diverge. De plus, la convergence est uniforme et absolue sur chaque disque fermé dans $D(z_0; R)$. Si $|z - z_0| = R$ on sait rien.

Critère d'Abel-Weierstrass $r_0 \geq 0$, $|a_n| r_0^n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, M \geq 0$ constante. Alors pour chaque $r < r_0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge absolument et uniformément sur $\overline{D(z_0; r)}$.

Démonstration du Critère Si $z \in \overline{D(z_0; r)}$ on a

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n = \underbrace{|a_n| r_0^n}_{\leq M} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n < M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n =: M_n$$

Puisque $\frac{r}{r_0} < 1 \Rightarrow \sum M_n$ converge. Par Weierstrass la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ conv. unif. et abs. sur $\overline{D(z_0; r)}$. ■

Démonstration du Théorème

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge}\}$$

R existe et est unique. Soit $r_0 < R$. Par la déf. de R , $\exists r_1$, t.q. $r_0 < r_1 \leq R$ t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n$ converge.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_0^n$ converge (par comparaison). Les termes $|a_n| r_0^n$ sont bornés (parce que $|a_n| r_0^n \rightarrow 0$) Donc par Abel-Weierstrass la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge uniformément et absolument sur $\overline{D(z_0; r)} \forall r < r_0$.

Puisque pour chaque z avec $|z - z_0| < R$ est dans $\overline{D(z_0; r)}$ et puisque on peut choisir toujours r_0 tq $r < r_0 < R$ on a converge pour tout z t.q. $|z - z_0| < R$. Si $|z - z_0| > R$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ converge on va arriver à une contradiction. Les termes $a_n(z_1 - z_0)^n$ sont bornés (en val. absolues) parce qu'ils $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc par Abel-Weierstrass, si $R < r < |z_1 - z_0|$ on conclut que $\sum a_n(z_1 - z_0)^n$ converge absolument pour $z_1 \in \overline{D(z_0; r)}$.

Donc, par comparaison $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge. (avec $r > R$). *Contradiction avec la définition de R .* ■

Les séries entières sont dérivables : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ est une fonct. dérivable sur $D(z_0; R)$.

Dérivation des séries entières Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $|z - z_0| < R$. Alors $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ et cette série a le même rayon de convergence. De plus

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Démonstration Nous savons déjà que $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ converge sur $D(z_0; R)$. Pour démontrer que la série dérivée a le même rayon de conv. il faut

seulement dem. que si $|z - z_0| > R$ elle diverge. Si elle était convergente pour un z_1 avec $\underbrace{|z_1 - z_0|}_{=r_0} > R$ alors $\{n(a_n)r_0^{n-1}\}$ était bornée. Donc

$$a_n r_0^n = (n a_n r_0^{n-1}) \frac{r_0}{n}$$

était aussi borné et donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ était convergente par Abel-Weierstrass. Contradiction, car $r > R$. Il faut encore det a_n . Si $z = z_0 \Rightarrow f(z_0) = a_0$. Inductivement on trouve

$$f^{(n)}(z) = n! a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}$$

si $z = z_0 \Rightarrow f^{(n)}(z_0) = n! a_n + 0$.

Unicité du dev. : Si $\sum a_n (z - z_0)^n = f(z) = \sum b_n (z - z_0)^n \forall z \in D(z_0; R) \Rightarrow a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{C}$. Démo : Par thm. prec.

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = b_n \quad .$$

■

Calcul de R : $\sum a_n (z - z_0)^n$ (i) Rapport : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ existe \Rightarrow il est égal à R .

(ii) Malive : Si $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |a_n|$ existe, alors $R = \frac{1}{\rho}$. (Si $\rho = 0$, ou parc $R = \rho$).

Dem. On va dem. que $R = \sup\{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n < \infty\}$.

(iii) Par le critère on rapport on sait que $\sum |a_n| r^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} r^{n+1}|}{|a_n r^n|} < 1 \quad \text{ou} \quad > 1$$

càd précicement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > r \quad \text{ou} \quad < r$$

Par déf de R_1 la formule est dém.

Sans démonstration

□

Remarque imp. Le critère de la racine est plus général. ON utilise le lim. sup. : $R = \frac{1}{\rho}$, ou, $\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. (Formule de HADAMARD).

Exemple

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n, R = 1$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, R = \infty$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n, R = 0$

4.6 Théorème de Taylor

Théorème $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable, $z_0 \in D, D(z_0; r) \subset D$.
Alors, pour chaque $z \in D(z_0; r)$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

est convergente sur $D(z_0; r)$. (càd. le rayon de conv $\geq r$). On a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0; r) \quad .$$

Sans démonstration

□

Corrolaire $D \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Alors f est dérivable sur $D \Leftrightarrow \forall z_0 \in D, \exists r > 0$ tel que $D(z_0; r) \subset D$ et $f|_{D(z_0; r)}$ est représentée par le développement de Taylor.

dérivabilité = analyticité

Totalement faux pour fonctions réelles !

Analycité complexe s'appelle **holomorphie**.

4.6.1 Zéros des fonctions analytiques

$f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, D ouvert

f analytique.

$c \in D$, $D(c; R)$ le plus grand disque de centre c , rayon r contenu dans D .

Alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (z-c)^k$$

$$|z-c| < r, \quad \text{conv.}$$

Si $f^{(k)}(c) = 0, \forall k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow f \equiv 0$ sur $D(c; r)$.

Sinon, $\exists n \in \mathbb{N}$ plus petit tel que

$$f^{(n)}(c) \neq 0$$

Si $n = 0 \Rightarrow f(c) \neq 0$

Si $n > 0 \Rightarrow f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ et $f^{(n)}(c) \neq 0$.

On dit que c est un zéro d'ordre n .

$$\Rightarrow f(z) = (z-c)^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (z-c)^{k-n}}_{\varphi(z)}$$

$\varphi(c) \neq 0$, φ est analytique.

c zéro d'ordre $n \Rightarrow f(z) = (z-c)^n \varphi(z)$, $\varphi(c) \neq 0$, φ analytique. C comp. comme les polynômes. $\varphi(c) \neq 0 \Rightarrow \exists 0 < \rho \leq r$ t.q. $\varphi(z) \neq 0$ si $z \in D(c; \rho)$. Donc c est isolé.

Propriété $D \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytique $c \in D$, $D(c; r) \subset D$ disque.

Supposons que $f(c) = 0$. Il y a exactement 2 possibilités

– $f(z) = 0, \forall z \in D(c; r)$

– $\exists n \in \mathbb{N}$, t.q. $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ et $f^{(n)}(c) \neq 0$. ($n \geq 1$)

Dans ce cas $\exists \varphi(z)$ analytique dans $D(c; r)$ avec $\varphi(c) \neq 0$ et $f(z) = (z-c)^n \varphi(z), \forall z \in D(c; r)$. Il existe $0 < \rho \leq r$ t.q. $f(z)$ est zéro seulement en c dans le disque $D(c; \rho)$.

Corollaire $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique $c \in D$ S'il existe une suite z_1, z_2, \dots des points distincts t.q. $z_n \rightarrow c$ et $f(z_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, alors $f(z) = 0, \forall z$ dans le plus grand disque ouvert de centre c contenu dans D .

4.6.2 Continuation analytique

Idée Si deux fonctions holomorphes coïncident sur un sous-ensemble ("grand") d'un ensemble connexe alors ils sont égaux.

Théorème d'identité – Principe de continuité analytique

Soit f, g deux fonctions analytiques sur D ouvert et *connexe*. Supposons que $\{z_n\} \subset D$, éléments distincts, $z_n \rightarrow z_0, z_0 \in D$ et on a $f(z_n) = g(z_n), n = 1, 2, \dots$. Alors $f \equiv g$. En part. si f et g coïncident sur un voisinage de $z_0 \Rightarrow f \equiv g$ sur D .

Sans démonstration □

Corollaire Les zéros (ou plus général, les points où une valeur est atteinte) d'une fonction holomorphe sont isolés. C.à.d. si f est hol. et non-constant sur un ouvert connexe D et $f(z_0) = w_0$, avec $z_0 \in D$, alors $\exists \epsilon > 0$ t.q. $f(z)$ n'est jamais égal à w_0 dans $\{0 < |z - z_0| < \epsilon\}$.

Sans démonstration □

Corollaire $f : D_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

$g : D_2 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

D_1, D_2 ouverts connexes, f, g holomorphes.

Supposons que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ et que $f|_{D_1 \cap D_2} = g|_{D_1 \cap D_2}$.

Soit $h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D_1 \\ g(z) & z \in D_2 \end{cases}$.

Alors h est holomorphe sur $D_1 \cup D_2$ et est la seule fonction holomorphe sur $D_1 \cup D_2$ qui coïncide avec f sur D_1, g sur D_2 .

4.7 Singularités

f n'est pas analytique en z . Donc une série entière est possible.

Théorème, Série de Laurent Soit $0 \leq r_1 < r_2, z_0 \in \mathbb{C}, A := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Soit f analytique dans A . Alors on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

ou les deux séries conv. absolument sur A et uniformément dans les ensembles $B_{\beta_1, \beta_2} = \{z \in A \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$ ou $r_1 < \beta_1 < \beta_2 < r_2$.

C'est la **série de Laurent** autour z_0 dans l'anneau A .

Si γ est un cercle de centre z_0 et rayon $r, r_1 < r < r_2$ alors

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \quad n = 1, 2, \dots$$

(Si on pose $b_n = a_{-n}$ on a la même formule). La série de LAURENT sur A est unique.

Remarques

1. Les formules pour les coeff. ne sont pas pratiques. En tout cas, on n'a pas

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} .$$

f n'est pas défini en z_0 .

2. On va utiliser des trucs (?) pour calculer les coefficients.
3. On va voir dans la démonstration que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge pour $|z - z_0| < r_2$, mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{|z - z_0|^n}$ est convergente pour $|z - z_0| > r_1$ et donc leur somme est convergente dans A .
4. L'unicité de la série de LAURENT dépend du domaine(!!!).

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} \left| \frac{1}{z(1 - (-\frac{1}{z}))} \right| \\
 &= \frac{1}{z^2} (1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots
 \end{aligned}$$

Soit $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-z} \right) \\
 &= -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + \dots) \quad \text{valable pour } |z| < 1 \\
 &= -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots
 \end{aligned}$$

Sans démonstration

□

4.7.1 Cas spécial très important

$r_1 = 0$. Donc f est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r_2\}$. On dit que z_0 est une **singularité isolée**. Les points où f n'est pas holomorphe s'appellent **singularités**.

Définition Soit z_0 une singularité isolée.

1. Si tous les $b_n = 0$ sauf un nombre fini on dit que z_0 est un **pôle**. Si k est le plus grand nombre naturel, tel que $b_n \neq 0$, z_0 est un pôle d'ordre k . Si $k = 1$, alors z_0 est un pôle simple.
2. S'il y a une infinité des $b_k \neq 0$, z_0 est appelé une **singularité essentielle**.
3. Si tous les $b_k = 0$, z_0 est appelé **singularité apparente**.
4. $b_1 = \text{Res}(f; z_0)$ **Résidu** de f en z_0 .
5. Si une fonction est holomorphe à l'exception des pôles, elle est appelée **méromorphe**.

Donc si f a un pôle d'ordre k , l'expression de Laurent est

$$\begin{aligned} & \frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots \quad b_k \neq 0 \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^k} [b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \dots + a_0(z-z_0)^k + a_1(z-z_0)^{k+1} + \dots] \\ &= \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \quad \text{avec } g(z) \text{ holomorphe} \end{aligned}$$

La partie

$$\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

est appelée la **partie principale**.

Si f a une singularité apparente en $z_0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. On sait rien pour f si $z = z_0$. Donc on fait l'extension par continuité de f en $z = z_0$. On trouve $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$. Donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ même à $z = z_0$. Donc f est analytique dans le disque.

On applique l'expansion de Laurent

Propriété f holomorphe dans D , z_0 singularité isolée avec résidu b_1 en z_0 .
Si γ est un cercle de centre z_0 dans D dont l'intérieur est dans D , alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = b_1 2\pi i \quad .$$

Cette propriété peut être utilisée à l'inverse : on calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$ en connaissant b_1 .

Exemple

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

Donc $z_0 = 0$ est une singularité essentielle, $b_1 = 1$. Donc $\int_{\gamma} e^{1/z} dz = 2\pi i$ pour tout cercle de centre 0.

4.7.2 Caractérisation de toutes les singularités

Propriété f holomorphe dans D avec une singularité isolée z_0 .

1. z_0 est singularité apparente \Leftrightarrow une de ces conditions est vraie
 - a) f bornée dans un voisinage $V \setminus \{z_0\}$
 - b) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
 - c) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$
2. z_0 est un pôle simple $\Leftrightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \neq 0$. Cette limite est le résidu de f en z_0 .
3. z_0 est un pôle d'ordre $\leq k$ (Ou une singularité apparente) \Leftrightarrow une de ces conditions est vraie
 - a) $\exists M > 0$ tel que $|f(z)| \leq \frac{M}{|(z - z_0)^k|} \quad \forall z \in V \setminus \{z_0\}$
 - b) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$
 - c) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z)$ existe
4. z_0 est un pôle d'ordre $k \geq 1 \Leftrightarrow \exists \varphi(z)$ holomorphe dans un voisinage U de z_0 tel que $U \setminus \{z_0\} \subset D$, $\varphi(z_0) \neq 0$ et $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}$, $\forall z \in U, z \neq z_0$.

Démonstration Si 1 et 2 sont démontré, alors, 3 découle de 1, pour la fonction $(z - z_0)^k f(z)$.

Je ne note pas la démonstration en détail. ■

Il y a des propriétés pour les fonctions holomorphes qui sont connues pour les polynômes. P. ex.

Propriété f, g sont holomorphes dans un voisinage de z_0 . Supposons que z_0 est un zéro d'ordre n pour f et d'ordre k pour g . Soit $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$. Alors

1. Si $k > n$, $\Rightarrow h$ a un pôle d'ordre $k - n$ en z_0 .
2. Si $k = n$, $\Rightarrow h$ a une singularité apparente en z_0 .
3. Si $k < n$, $\Rightarrow h$ a une singularité apparente en z_0 .

et si on définit $h(z_0) = 0$ on obtient une fonction holomorphe avec un zéro d'ordre $n - k$ en z_0 .

Sans démonstration □

Remarque Si z_0 est un pôle d'ordre k , alors

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}, \forall z \in U \setminus \{z_0\}$$

avec $\varphi(z_0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$. mais si z_0 est une singularité essentielle

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \text{ --- / --- } > \infty$$

en général.

Théorème de Picard z_0 singularité *essentielle* pour f .

Alors $\forall \omega \in \mathbb{C}$ (à l'exception possible d'une seule valeur). L'équation $f(z) = \omega$ a une infinité de solutions dans $U \setminus \{z_0\}$.

Sans démonstration □

4.7.3 Calcul des résidus

z_0 singularité isolée pour f .

\Rightarrow Série de Laurent

$$f(z) = \dots + \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

$b_1 = \text{Res}(f; z_0)$ résidu.

Propriété z_0 une singularité isolée de f et soit $k \geq 0$ le plus *petit nombre* naturel t.q. $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \Rightarrow z_0$ est un pôle d'ordre k et si on définit

$$\varphi(t) := (z - z_0)^k f(z)$$

Alors $\varphi(t)$ est unique pour $z \neq z_0$, φ analytique en $z_0 \Rightarrow \text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \varphi^{(k-1)}(z_0)$

Sans démonstration □

Formule

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} \Big|_{z=z_0} [(z-z_0)^k f(z)]$$

si z_0 est un pôle d'ordre k .

Rappel z_0 pôle simple $\Rightarrow \operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Propriété g, h analytique en z_0 , $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$ a un pôle simple en z_0 .

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}; z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Sans démonstration □

Commentaire: A
lire page 244 – 250

Formules

1. $g(z)$ a z_0 un zéro d'ordre k et $h(z)$ a z_0 un zéro d'ordre $k+1 \Rightarrow \frac{g(z)}{h(z)}$ a en z_0 un pôle d'ordre 1.

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = (k+1) \frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

2. $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$, $h''(z_0) \neq 0 \Rightarrow z_0$ est un pôle d'ordre 2 pour $\frac{g}{h}$.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}; z_0\right) = 2 \frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3} \frac{g(z_0)h'''(z_0)}{|h''(z_0)|^2}$$

3. $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = \dots = h^{(k-1)}(z_0) = 0$, $h^{(k)}(z_0) \neq 0 \Rightarrow z_0$ pôle d'ordre k pour $\frac{g}{h}$.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}; z_0\right) = \left(\frac{k!}{h^k(z_0)} \right) \begin{vmatrix} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & 0 & \dots & 0 & g(z_0) \\ \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & \dots & 0 & g'(z_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{h^{(2k-1)}(z_0)}{(2k-1)!} & \frac{h^{(2k-2)}(z_0)}{(2k-2)!} & \dots & \dots & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \end{vmatrix}$$

4.7.4 Théorème des résidus

Rappel

$$2\pi i \operatorname{Res}(f; z_0) = \int_{\gamma} f(z) dz$$

Théorème $D \subset \mathbb{C}$ ouvert, $z_1, \dots, z_n \in D$ points distincts, f holomorphe sur $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Soit γ une courbe fermée dans D , homotope à un point. Supposons que $z_1, \dots, z_n \notin \gamma$.

Alors

$$\int_{\gamma} f(z) = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}(f; z_i) I(\gamma; z_i)$$

Sans démonstration

□

Leçon du
2007-05-21

Commentaire: Ici
il manque toute
une heure du
cours...

Intégrales impropres Par exemple :

$$\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^s f(x) dx$$

si les limites existent.

Rappel $|f(x)| \leq |g(x)|, \forall x \geq a$ et

$$\int_a^{\infty} g(x) dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$$

converge. De plus, si $\int_a^{\infty} g(x) dx = G \in \mathbb{R} \Rightarrow \left| \int_a^{\infty} f(x) dx \right| \leq G$. (Même chose pour $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.)

Exemple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Solution Cette int. est convergente. L'intégrand est une fonction paire donc il suffit d'étudier $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$. L'intégrand nous donne l'idée de comparer avec $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^s \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^\infty = 1$ qui est donc conv., $\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1/x^2+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Donc $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$ est convergente. On regarde la fonction $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ qui a 4 pôles : $z^4 = -1 = e^{i\pi}$, $z_k = e^{i/4(\pi+2k\pi)}$. Prenons $R > 1$ (autour des quatre points) grand et on regarde la courbe fermée $\gamma_r * \gamma_\mu$ (demicercle). Alors z_1, z_2 sont dans l'intérieur de cette courbe fermée et z_3, z_4 sont dans l'extérieur. ON applique le théorème des résidus. $\text{Res}(f; z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} z \frac{z^2}{1+z^4}$ rel. compliqué.

Autre formule :

$$\text{Res}(f; z_k) = \frac{z^2}{(1+z^4)'} \Big|_{z=z_k} = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k}$$

On applique le théorème des résidus :

$$\int_{\gamma_R * \mu_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 2\pi i (\text{Res}(f; z_1) + \text{Res}(f; z_2)) = 2\pi i / 4 (e^{-i\pi/4} + e^{i3\pi/4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

C'est vrai pour tout $R > 1$. Les intégrales sur les 2 courbes sont

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx$$

$$\int_{\mu_R} f(z) dz = ?$$

$$|f(z)| = \left| \frac{z^2}{1+z^4} \right| = \frac{R^2}{|1+z^4|} \leq \frac{R^2}{R^4-1}$$

parce que $(1+z^4) \geq R^4-1$. En effet

$$R^4 = |z|^4 = |z^4| = |z^4+1-1| \leq |z^4+1| - 1$$

Donc

$$\left| \int_{\mu_R} f(z) dz \right| \leq \frac{R^2}{R^4-1} l(\mu_r) = \frac{\pi R R^3}{R^4-1} = \frac{\pi R^3}{R^4-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

On conclut que

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R * \mu_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mu_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx + 0$$

△

On a besoin de

1. Une estimation qui garantie que l'intégrale est convergente.
2. Un nombre fini des singularités dans le plan sup. (inf). Aucune singularité sur l'axe réelle! Tous sont continue dans l'intérieure d'une grande courbe.
3. Une estimation garantissant que l'intégrale sur le demi cercle supérieur $\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

Propriété

1. f holomorphe sur un ouvert qui contienne le plan supérieur

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\}$$

à l'exception d'un nombre fini des singularités isolés, aucune sur l'axe réelle. Supposons que $\exists M, R_0 > 0, p > 1$ tels que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p} \forall z \in \mathcal{H}, |z| > R_0$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_i \text{Res}_i(f; \text{ dans } \mathcal{H})$$

2. Les mêmes cond. avec \mathcal{H} remplacé par $\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \leq 0\}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_i \text{Res}_i(f; \text{ dans } \mathcal{L})$$

Sans démonstration

□

Corollaire Les deux formules sont valables si $f = \frac{P}{Q}$, P, Q polynômes $\deg Q \geq 2 + \deg P$ et Q n'a pas des zéros réels.

4.8 Transformée de Laplace

Justification

$$\begin{cases} y' - ay = f(t), & a \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Formellement : $D := \frac{d}{dt}$

$$(D - a)y = f$$

La solution

$$\frac{1}{D - a} f(t)$$

Ici

$$\frac{1}{D - a} f(t) = e^{at} \int_0^t e^{-as} f(s) ds$$

Exemple

$$(D^2 - 3D + 2)y = f(t) = e^t$$

Solution

$$D^2 - 3D + 2 = (D - 1)(D - 2)$$

$$y = \frac{e^t}{(D - 1)(D - 2)}$$

$$\frac{1}{(D - 1)(D - 2)} = \frac{1}{D - 2} - \frac{1}{D - 1}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^t}{D - 2} - \frac{e^t}{D - 1} \\ &= (e^{2t} \int e^{-2t} e^t dt + c_1 e^{2t}) - (e^t \int e^{-t} e^t dt + c_1 e^t) \\ &= c_1 e^{2t} + c_2 e^t - te^t - e^t \end{aligned}$$

△

Définition $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

$$(\mathcal{L}f)(z) := \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

qui est définie pour $z \in \mathbb{C}$ t.q. l'intégrale converge. $\mathcal{L}f$ est la transformée de LAPLACE de f .

Définition $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est d'ordre exponentiel si $\forall A > 0, \exists B \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(t)| \leq Ae^{tB}$$

Convention Tous les fonctions f sont d'ordre exponentiel. De plus on suppose que pour chaque $[a, b]$ fini, la fonction f est bornée et inf. sur $[0, a]$.

Exemple f est par morceaux \Rightarrow deuxième condition.

Théorème de convergence $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ (ou \mathbb{R}) d'ordre exp. (conditions précédentes). Il existe un nombre unique $-\infty \leq \sigma < +\infty$ t.q. $\mathcal{L}f$ est une intégrale convergente pour $\operatorname{Re} z > \sigma$ et der. pour $\operatorname{Re} z < \sigma$. De plus $(\mathcal{L}f)(z)$ est analytique sur $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \sigma\}$ et on a

$$\frac{d}{dz}(\mathcal{L}f)(z) = - \int_0^{\infty} te^{-zt} f(t) dt$$

pour $\operatorname{Re} z > \sigma$. Le nombre σ s'appelle **abscisse de convergence**.

On définit le nombre

$$\rho = \inf\{B \in \mathbb{R} \mid \exists A > 0 \text{ t.q. } |f(t)| \leq Ae^{Bt}, \forall t \geq T\} .$$

Alors $\sigma \leq \rho$.

Il est possible que $\rho = -\infty$.

Linéarité Si $\operatorname{Re} z > \max\{\rho(f), \rho(g)\} \Rightarrow \mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$.

Remarque Une méthode de calcul de σ . Supposons que $\mathcal{L}f$ coïncide avec une fonction méromorphe et qu'un pôle est sur la droite $\operatorname{Re} z = \tau$. Alors $\sigma = \tau$.

Remarque σ est difficile à calculer, ρ est plus facile. $\sigma < \rho$ est possible.

Exemple $f(t) = e^t \sin(e^t), \rho = 1, \sigma = 0$.

Théorème Si f cont. par morceaux et d'ordre exponentiel alors :

- pour $\operatorname{Re} z > \rho \Rightarrow (\mathcal{L}f)(z)$ converge absolument.
- $|(\mathcal{L}f)(z)| \leq \frac{A}{\operatorname{Re} z - B}$ si $\operatorname{Re} z > B > \rho$. A est ind de z .
- $\lim_{z \rightarrow \infty} (\mathcal{L}f)(z) = 0$.
- $\lim_{z \rightarrow \infty} z(\mathcal{L}f)(z)$ est bornée.

Théorème Supposons que f et g sont continues et que $(\mathcal{L}f)(z) = (\mathcal{L}g)(z)$ pour $\operatorname{Re} z > \tau_0, \tau_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f(t) = g(t), \forall t \in [0, \infty[$.

Propriété

- Transformation des dérivées :

f cont sur $[0, \infty[$ et C^1 par morceaux. Alors pour $\operatorname{Re} z > \rho$ on a

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dz}\right)(z) = z(\mathcal{L}f)(z) - f(0)$$

Car ... et $(\mathcal{L}f)(z) = z^n(\mathcal{L}f)(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

- Transformation d'une primitive :

f ordre exp. cont par morceaux

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Alors pour $\operatorname{Re} z > \max\{0, \rho\}$ on a

$$(\mathcal{L}g)(z) = \frac{1}{z}(\mathcal{L}f)(z)$$

– Théorème de décalage :

Fixons $a \in \mathbb{C}$. Alors pour $\operatorname{Re} z > \rho(f) - \operatorname{Re} a$ on a

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(z) = (\mathcal{L}f)(z + a)$$

– Théorème du retard :

Soit $a > 0$ et

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ f(t - a) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Alors pour $\operatorname{Re} z > \rho(f)$ on a

$$(\mathcal{L}g)(z) = e^{-az}(\mathcal{L}f)(z) \quad .$$

– Convolution :

$$(f * g)(t) := \int_0^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) \, d\tau$$

on on pose $f(t) = 0$ si $t < 0$, $g(t) = 0$ si $t < 0$. Cette intégrale est seulement sur $[0, t]$.

$$f * g = g * f.$$

– Théorème de convolution :

Si $\operatorname{Re} z > \{\rho(f), \rho(g)\}$ on a

$$(\mathcal{L}(f * g))(z) = (\mathcal{L}f)(z)(\mathcal{L}g)(z) \quad .$$

– Théorème de la valeur initiale :

Si f est continue, f' continue et $|f'(t)| \leq Ae^{Bt}, \forall t \geq T_0 > 0$ alors

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(\mathcal{L}f)(z)$$

Exemple $(\mathcal{L}1)(z) = \frac{1}{z}$
 $(\mathcal{L}e^{-at})(z) = \frac{1}{z+a}$

La formule de l'inversion complexe Soit $F(z)$ holomorphe sur \mathbb{C} à l'exception d'un nombre fini des singularités isolées. Supposons que pour un nombre $\sigma \in \mathbb{R}$, F est analytique sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \sigma\}$. Supposons aussi que $\exists M > 0, R > 0, \beta > 0$ tels que

$$|F(z)| \leq M \frac{1}{|z|^\beta}, \forall |z| \geq R$$

Exemple $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, P, Q polynômes avec $\deg Q \geq 1 + \deg P$.

Pour tout $t \geq 0$ soit

$$f(t) = \sum (\text{résidus de } e^{zt} F(z) \text{ à chaque singularité de } F \text{ dans } \mathbb{C})$$

Alors $(\mathcal{L}f)(z) = F(z), \forall \operatorname{Re} z > \sigma$.

Corollaire Même hypothèses. Si $F(z)$ est analytique pour $\operatorname{Re} z > \sigma$ et a un pôle sur la droite $\operatorname{Re} z = \sigma$ alors

1. l'abscisse de convergence est σ .
2. $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{zt} F(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha + iy)t} F(\alpha + iy) dy$ pour chaque const $\alpha > \sigma$. Ici $z = x + iy$. La première int. est sur la droite verticale $\operatorname{Re} z = \alpha$ et est convergente en tant que intégrale de Riemann.

Attention : Il faut vérifier *tous les hypothèses* ! Si une hypothèse manque le théorème n'est pas vrai et il faut utiliser le tableau.

Théorème $P(z), Q(z)$ polynômes $\deg Q \geq 1 + \deg P$. Soient z_1, \dots, z_m les zéros de Q et supposons qu'ils sont simples. Alors l'inverse de la transformé de LAPLACE de $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ est donnée par le développement de HEAVYSIDE :

$$f(t) = \sum_{i=1}^m e^{z_i t} \frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}$$

De plus $\sigma(f) = \max\{\operatorname{Re} z_i \mid i = 1, \dots, m\}$.

4.8.1 Applications

Exemple

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

sur $[0, \infty[$.

Solution On utilise

$$(\mathcal{L}y')(z) = z(\mathcal{L}y)(z) - y(0) = z(\mathcal{L}y)(z)$$

$$(\mathcal{L}y'')(z) = z^2(\mathcal{L}y)(z) - zy(0) - y'(0) = z^2(\mathcal{L}y)(z) - 1$$

On applique \mathcal{L} à l'équation

$$z^2(\mathcal{L}y)(z) - 1 + 4z(\mathcal{L}y)(z) + 3(\mathcal{L}y)(z) = 0$$

$$\Rightarrow (z^2 + 4z + 3)(\mathcal{L}y)(z) = 1$$

$$\Rightarrow (\mathcal{L}y)(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3} = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3}$$

Donc

$$y(t) = \sum (\text{Res}_{\{-1, -3\}} \frac{e^{zt}}{(z+1)(z+3)})$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$$

△

Exemple

$$y'' + 2y' + 2y = f$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Solution On applique \mathcal{L} à l'équation.

$$z^2(\mathcal{L}y)(z) + 2z(\mathcal{L}y)(z) + 2(\mathcal{L}y)(z) = (\mathcal{L}f)(z)$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}y)(z) &= \frac{(\mathcal{L}f)(z)}{z^2 + 2z + 2} \\
 z^2 + 2z + 2 = 0 &= (z - z_1)(z - z_2) \\
 z_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm i
 \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{z^2 + 2z + 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z - z_2}$$

La transformé de LAPLACE inverse de $\frac{e^{zt}}{z^2+2z+2}$ est la somme des residus

$$g(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{z_1 t}}{z - z_1} - \frac{1}{2} \frac{e^{z_2 t}}{z - z_2} = e^{-t} \sin t$$

$$\Rightarrow y(t) = (g * f)(t) = \int_0^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(t - \tau)e^{-\tau} \sin \tau d\tau$$

△

Exemple

$$y'' + 4y't + 13y = \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

Utiliser seulement le tableau.

Solution On applique \mathcal{L} :

$$(z^2(\mathcal{L}y)(z) - zy(0) - y'(0)) + 4(z(\mathcal{L}y)(z) - y(0)) + 13(\mathcal{L}y)(z) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t\right)$$

$$(z^2(\mathcal{L}y)(z) - z + 2) + 4(z(\mathcal{L}y)(z) - 1) + 13(\mathcal{L}y)(z) = \frac{1}{(z + 2)^2 + 3^2}$$

$$(\mathcal{L}y)(z) = \frac{z + 2}{(z + 2)^2 + 3^2} + \frac{1}{((z + 2)^2 + 3^2)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z + 2}{(z + 2)^2 + 3^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{[(z + 2)^2 + 3^2]^2}\right) = e^{-2t} \cos 3t + \dots$$

△

4.9 Séries de Fourier

Propriété V sous espace vectoriel de \mathbb{C} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire

1. $\langle af + \rho, gh \rangle = a \langle f, h \rangle + \rho \langle g, h \rangle$
2. $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$
3. $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle \geq 0$, $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
4. $\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt$

Question difficile Peut-on écrire

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt \quad \forall f \in L^2([0, 2\pi])?$$

Commentaire: Il manque : calcul des coefficients, différents types de convergences, Suites de Cauchy, ...

Théorème Inégalité de Bessel. $\{\varphi_k\}$ une famille orthonormale dans V ($\Rightarrow \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$).
Alors $\forall f \in L^2(V)$, $\sum_{i=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2$ converge et on a $\sum_{i=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2$.

Sans démonstration □

Théorème de Parseval $\{\varphi_n\}$ est une famille orthonormale.
Alors $\{\varphi_n\}$ est complete $\Leftrightarrow \forall f \in V$, $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$

Sans démonstration □

Théorème de la meilleure approximation $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ orthonormale.
Alors \forall suite $\{t_0, \dots, t_n\}$ des coefficients $\in \mathbb{C}$, on a

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n t_k \varphi_k \right\| \geq \left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\| .$$

Égalité $\Leftrightarrow t_n = \langle f, \varphi_n \rangle$.

Sans démonstration □

Théorème Dans $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ la famille exponentielle $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{nx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et la famille trigonométrique $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{2\pi i}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi i}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont orthonormales et complets.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{nx}, \quad c_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Sans démonstration □

Théorème de convergence ponctuelle $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée par morceaux a une discontinuité soit en $x_0 \in [0, 2\pi]$ et supposons que $f'(x_0^+)$ et $f'(x_0^-)$ existent.

Alors la série de FOURIER de f (exp. ou trig.) converge vers $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$ en x_0 . Si f est continue en $x_0 \Rightarrow$ la série de Fourier converge vers $f(x_0)$ en x_0 .

Sans démonstration □

Théorème de convergence uniforme $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et f' est continue et fermé par morceaux avec discontinuités sauts (?). Alors la série de Fourier de f (exp. ou trig.) converge vers f absolument et uniformément sur $[0, 2\pi]$ (\Rightarrow donc aussi ponctuellement)

Sans démonstration

□

Théorème de dérivation $f'(-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, f' continue et bornée par morceaux avec discontinuités saut (?). Supposons que $f''(x)$ existe. Alors la série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

peut être dérivée term par terme en x et on a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-ka_k \sin(kx) + kb_k \cos(kx))$$

(la série de Fourier de f').

Sans démonstration

□

Leçon du
2007-06-18

Exemple

1. $f(x) = \begin{cases} -z & \text{si } x \leq 0 \\ z & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi]$
2. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 1+x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \sin x$
4. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq 0 \\ x \sin 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Solution Chaque fonction est continue et bornée par morceaux. Les discontinuités sont de type saut. (4) $f(x) = x \sin 1/x \rightarrow 0$ si $x \rightarrow 0$, Donc $f(0+) = 0$,

$$f(0-) = 1.$$

On fait l'étude à 0. $f'(0+)$, $f'(0-)$ existent pour (1), (2), (3). Pour (4) c'est pas vrai!. Si $h > 0$ on a

$$\frac{f(0+h) - f(0+)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

qui ne converge pas si $h \rightarrow 0$. Donc pour (4) le Thm. de conv. ponctuelle ne s'applique pas. Pour (1), (2), (3) ce théorème s'applique. Pour tous la conv. en moyenne est valable.

△

4.9.1 Convergence de la série

Hyp.	Conv.
$\int_0^{2\pi} f(x) ^2 dx < \infty$	Conv. vers f en moyenne
f, f' continues et bornées par morceaux, discontinuité de type saut.	Conv vers f en moyenne et ponctuelle vers $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$
f cont., $f(+\pi) = f(-\pi)$, f' cont et bornée par morceaux. Seulement disc. de type saut.	Convergence de la série de Fourier vers f uniformément (et donc ponctuellement et moyenne).

Théorème de Carleson Si $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$ la série de FOURIER de f converge ponctuellement vers f presque partout (càd. sauf sur un ensemble de mesure zéro).

Sans démonstration extrêmement difficile

□

Théorème d'intégration Supposons $\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$ et que f a la série de FOURIER

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Soit $g(x) = \int_{-\pi}^x f(y) dy$ alors on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{a_n(x + \pi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^x \cos(ny) dy + b_n \int_{-\pi}^x \sin(ny) dy \right) \\ &= \frac{a_n(x + \pi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin(nx) + b_n((-1)^n - \cos(nx)) \right) \end{aligned}$$

et la conv. est uniforme pour $x \in [-\pi, \pi]$.

Sans démonstration

□

4.9.2 Calcul des série de Fourier

Les formes trigonométrique et exponentielle sont équivalentes. On utilise tous les thm. précédentes. Mais, il faut utiliser autres propriétés de f .

Exemple f impaire, donc

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-x) \cos(-nx) d(-x) \\ &= \dots = 0 \end{aligned}$$

Donc si f impaire, on a une série des sinus.

De même pour f paire, on a une série des cosinus.

Si l'intervalle est $[-l, l]$ on remplace la base orthonormale $\{\varphi_n\}$ par les fonctions

$$\psi_k(x) := \sqrt{\frac{\pi}{l}} \varphi_k\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad .$$

Les ψ_k sont orthonormaux sur $[-l, l]$.

Si on travaille sur un demi intervalle $[0, l]$

- Pour les séries des cosinus on étend f sur $[-l, l]$ en définissant $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

Pour la conv. en 0 il faut travailler avec la nouvelle fonction étendue ! Si $f'(0+)$ existe, alors la fonction étendue n'a pas de saut en 0. De la même façon on traite l . Maintenant on applique les thm. de conv.

- Pour la série des sinus on étend f sur $[-l, 0]$ par $f(-x) = -f(x)$ si $x \in [0, l]$. Dans ce cas, la série de FOURIER est toujours 0 à l'origine. On a donc de type saut. On applique les thm. mais il faut se souvenir que la série est 0 pour $x = 0, \pm l, \pm 2l, \dots$

4.9.3 Équation de la chaleur

$T(x, t)$ temperatur d'une barre au point x et au moment t .

$\frac{\partial T}{\partial x}$ changement du flux de chaleur.

"Isolation" : $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0$.

Problème

- $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, $0 < x < l$ équation.
- $T(x, 0) = f(x)$, $0 < x < l$ condition initiale.
- $\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = 0$ isolation aux extrémités. (Condition au bord)

Pour simplifier, on pose $k = 1$.

Méthode Séparation des variables.

$$T(x, t) = g(x)h(t)$$

On remplace dans l'equ.

$$\Rightarrow g(x)h'(t) = g''(x)h(t) \Rightarrow \frac{g(x)}{g''(x)} = \frac{h(t)}{h'(t)}$$

\Rightarrow ces rapports sont const. On pose cette constante à $\frac{1}{\lambda}$.

$$\frac{g(x)}{g''(x)} = \frac{h(t)}{h'(t)} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda g(x) + g''(x) = 0$$

$$\lambda h(t) + h'(t) = 0$$

On résout ces équation et on fait la somme.

$$g(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

Alors $\lambda h(t) + h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{h'(t)}{h(t)} = -\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$.

$\log h(t) = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}t, h(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}, n = 0, 1, 2, \dots$

Solution est

$$e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), n = 0, 1, 2, \dots$$

On fait l'expansion de Fourier de f sur la demi-int. $[0, l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Théorème Si $f \in L^2$, alors pour $t > 0$ on a

$$T(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

qui converge uniformément, est différentiable et est la solution du problème de la chaleur.

Pour $t = 0$ c'est égal à $f(x)$ (en moyenne) et ponctuellement si f est C^1 .

Ici $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$.

Attention Pour $t > 0$ on a convergence rapide à cause de l'exponentielle. Si $t < 0$ on a divergence.

Sans démonstration □

Théorème $\lim_{t \rightarrow \infty, t > 0} T(t, x) = f(x)$ en moyenne et unif. si f est cont. avec f' cont et bornée par morceaux.

Sans démonstration □

The End

5

work in progress

Examen

- aucune surprise ;-)
- Formulaire Fourier, Residus (si distribué) + aide mémoire
- 1 Ex. laplace
- 1 Ex. fourier

Index

- Aire
 - d'un graphe, 37
 - d'une surface, 36
- Ampère
 - Loi de, 53
- analyticité, 150
- Analytique
 - Fonction, 141
- analytique
 - fonction, 80
- Antidérivée
 - Existence, 121
 - Théorème de, 125
- Applications
 - conformes, 109

- Bolzano-Weierstrass, 10
- Branche d'argument, 96
- branche de la fonction, 101

- Carleson
 - Théorème de, 172
- Cauchy-Riemann
 - équation de, 110
- Chaleur
 - Équation de la, 174
- Champ
 - conservatif, 63
- Changement
 - de paramétrisation, 43
- Chemin, 17
- Compact, 10
- Conforme
 - Transformation, 100
- conforme, 109

- connexe
 - 2-, 66
 - simplement, 64
- conserver, 42
- Convergence
 - Théorème de, 163
- Convolution, 165
- Coordonnées curvilignes, 84
- Corps des nombres complexes, 93
- Cosinus, 100
- Courbe, 17
- Critère d'Abel-Weierstrass, 147

- Déformation
 - Théorème de, 124
- Dérivée
 - Directionnelle, 14
 - Matérielle, 71
 - Partielle, 12
- dérivabilité, 150
- différentiable, 12
- Dirichlet
 - Problème de, 83, 139

- Faraday
 - Loi de, 52
- Flux, 43
- Fonction
 - harmonique conjuguée, 115
 - Inverse, 15

- Gamma
 - Fonction-, Γ , 76
- Gauss
 - Loi de, 61
- Gradient, 13

- Green
 Formule de, 62
 Théorème de, 45
- Hadamard
 Formule de, 149
- harmonique, 75
- Heavyside
 Développement de, 166
- holomorphie, 150
- Homotopie, 128
- Hyperboloïde
 Paramétrisation, 36
- Inégalités
 de Cauchy, 133
- Indépendance de l'arc
 Théorème de, 121, 124
- Index
 d'une courbe, 129
- Intégrale
 curviligne, 29, 119
- Intérieur
 d'une courbe, 129
- inverser, 42
- Jacobien, 70
- Jordan
 Théorème de, 129
- Laplace
 Transformée de, 162
- Laurent
 Série de, 153
- Ligne de flot, 22
- Liouville
 Théorème de, 83
- Liunville
 Théorème de, 133
- Möbius
 Rouban de, 42
 Transformation de, 98
- méromorphe, 154
- Matrice Jacobienne, 110
- Maxwell
 Équations de, 52
- Moivre
 Formule de, 96
- Morera
 Théorème de, 135
- Moyenne
 Théorème de la moyenne pour les boules, 79
- Ordre exponentiel, 163
- Orientation, 42
- pôle, 154
- Parseval
 Théorème de, 169
- Picard
 Théorème de, 157
- Produit
 Mixte, 8
 Vectoriel, 7
- Région élémentaire, 54
- Résidu, 154
- repère naturel, 85
- Simple
 x/y-, 45
- singularité
 isolée, 154
- Sinus, 100
- Sphère
 de Riemann, 107
- Stokes
 Théorème de, 49
- Surface
 de revolution, 37
 L'aire d'une, 36
 lisse, 35
 paramétrisée, 34
- Théorème fondamentale d'algèbre, 134

ToDo

- see randnots
- overfull boxes markieren und entfernen
- pagebreak vor exemple höher als darin
- exemple einleitung kursiv, dann gerade, sinnvolle titel
- qed und 'Démonstration' prüfen und vereinheitlichen
- textbf ↔ emph
- $\exp x$ et e^x ersetzen durch \mathbf{e}^x o.ä.
- texts benutzen
- (ref) -i_eref?
- solénoïdal = $\nabla \cdot v \equiv 0$
- "...” als franz. anführungszeichen
- neues QED
- Abstand **nach** my... ist zu gross
- hatchcolor statt fillcolor
- ...

Remarques

Ce document comporte les notes prises par Markus B. SCHENKEL dans le cours *Analyse III et IV*, enseigné par Prof. Tudor RATIU à l'EPFL en 2006 / 2007.

C'est la 36 ième Révision de ce document. Créé le 2007-06-18 avec L^AT_EX 2_ε et KOMA-Script en utilisant MiKTeX.

Je ne garantie pas que les formules présentés ici sont toutes correctes, mais je remercie toute correction ou amélioration. Contactez moi par mail markus.schenkel@epfl.ch ou le web <http://www.markus-schenkel.ch/contact>.